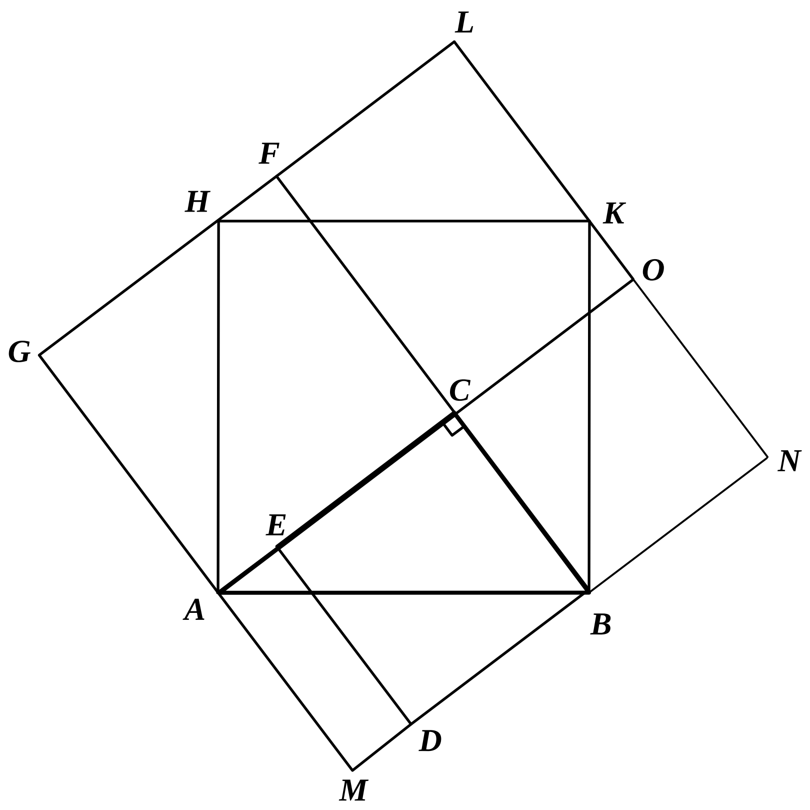
勾股定理證明-G130

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $CAGF$ (於求證過程第 1 點可得點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。
2. 分別以 $\overline{AB}$、$\overline{KH}$、$\overline{BK}$ 為邊，作與三角形 CAB 全等的三角形 MBA、三角形 LHK 與三角形 NKB (於求證過程第 2 點可得共線關係)。
3. 延長 $\overline{AC}$，與 $\overline{KN}$ 交於 O 點。



【求證過程】

先證明正方形 $AHKB$ 與外圍四個全等三角形所構成的四邊形，與正方形 $CBDE$、正方形 $CAGF$ 與兩個全等長方形所構成的四邊形，皆是拼合出正方形 $LGMN$ 的區域，利用面積和相等的關係與利用等量面積的減法，可推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，得到 $G-H-F$ 共線：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}, \angle GAH = 90^\circ - \angle HAC = \angle CAB, \overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)},$$

得到 $\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又 $\angle FGA = 90^\circ$，所以

$$G-H-F \text{ 共線，即點 } H \text{ 在 } \overline{GF} \text{ 上。}$$

2. 證明共線關係：

因為$\Delta LHK \cong \Delta CAB$，得到$\angle LHK + \angle KHA + \angle AHG = 180^{\circ}$，所以

$$G-H-F-L\text{ 共線},$$

同理，因為$\Delta MBA \cong \Delta CAB$，所以

$$G-A-M\text{ 共線},$$
$$M-D-B\text{ 共線},$$

因為$\Delta NKB \cong \Delta CAB$，得到$\angle HKL + \angle BKH + \angle NKB = 180^{\circ}$，所以

$$L-K-N\text{ 共線},$$

同理可得

$$N-B-D-M\text{ 共線。}$$

3. 討論面積關係：

四邊形$LGMN$四角皆90°，邊長皆等於$(\overline{CA}+\overline{CB})$，因此四邊形$LGMN$為正方形，

又四邊形$CBNO$四角皆直角，邊長皆等於$\overline{CB}$，所以

$$\text{正方形}CBNO \cong \text{正方形}CBDE.$$

長方形$AMBC$與長方形$COLF$皆為長寬分別為$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的長方形，所以

$$\text{長方形}AMBC\text{面積}＝\text{長方形}COLF\text{面積}＝2\Delta CAB\text{面積}.$$

因此，可得到正方形$LGMN$面積兩種表示法

$$\begin{aligned}&\text{正方形}LGMN\text{面積}\\&＝\text{正方形}AHKB\text{面積}＋\Delta MBA\text{面積}＋\Delta GAH\text{面積}＋\Delta LHK\text{面積}\\&\quad＋\Delta NKB\text{面積}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\text{正方形}LGMN\text{面積}\\&＝\text{正方形}CAGF\text{面積}＋\text{正方形}CBNO\text{面積}＋\text{長方形}AMBC\text{面積}\\&\quad＋\text{長方形}COLF\text{面積}\end{aligned}$$

4. 整理最後上述面積關係，推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}&\text{正方形}AHKB\text{面積}＋4\Delta CAB\text{面積}\\&＝\text{正方形}LGMN\text{面積}\\&＝\text{正方形}CBNO\text{面積}＋\text{正方形}CAGF\text{面積}＋4\Delta CAB\text{面積}.\end{aligned}$$

同時減去$4\Delta CAB$面積，得到

$$\text{正方形}AHKB\text{面積}＝\text{正方形}CBDE\text{面積}＋\text{正方形}CAGF\text{面積}.$$

因此

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 17). Leipz.: Friese.
2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 ABC 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係。從基本架構的圖向外再分別作三個與三角形 CAB 全等的三角形，形成更大的正方形是此作圖很有特色的地方，利用拼合的面積加法過程得到全等形狀，再透過等量面積的消去法，轉換出畢氏定理的關係式是此證明有趣之處。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	