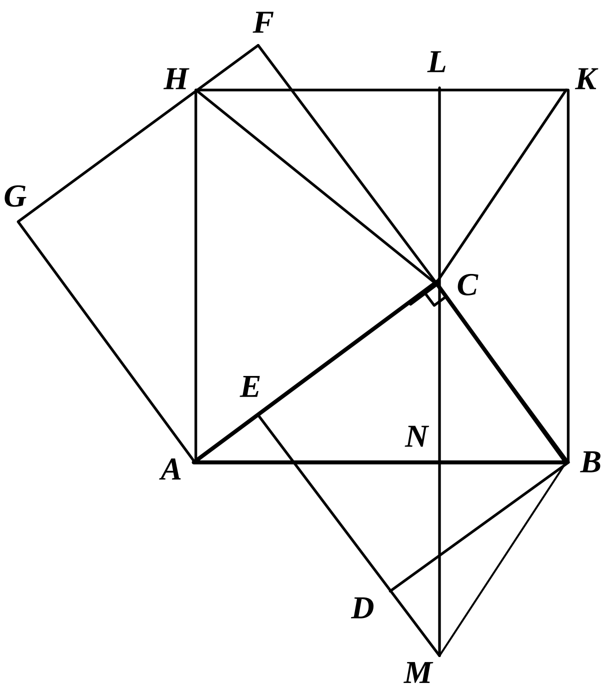
勾股定理證明-G129

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$ (於求證過程第 1 點可得點H在$\overline{GF}$上)。
2. 從C作$\overline{AB}$的垂線與$\overline{AB}$交於N點，與$\overline{HK}$交於L點。
3. 延長$\overline{LN}$與延長$\overline{ED}$，兩直線交於M點，連接$\overline{MB}$。
4. 連接$\overline{CK}$與$\overline{CH}$。



【求證過程】

將正方形$ABKH$分割成兩個矩形，透過輔助線將矩形、平行四邊形與三角形面積之間作轉換，利用三角形不同底高組合的面積計算，得到不同的表示法，進而得到三個正方形的面積關係，最後推得畢氏定理關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，進一步得到點H在$\overline{GF}$上：

   因為$\overline{AH}=\overline{AB}, \angle GAH = 90^{\circ} - \angle HAC = \angle CAB, \overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)},$$

得到$\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又$\angle FGA = 90^\circ$，所以

$$\text{點} H \text{ 在} \overline{GF} \text{ 上。}$$

2. 先證明三角形EMC與三角形CAB全等，再進一步得到四邊形$CMBK$為平行四邊形：

   因為$\overline{EC} = \overline{CB}, \angle MEC = 90^\circ = \angle ACB, \angle ECM = 90^\circ - \angle BCM = \angle CBA$，所以

$$\Delta EMC \cong \Delta CAB \text{(ASA 全等)}.$$

   得

$$\overline{CM} = \overline{BA} = \overline{BK}.$$

   又因為$\overline{CM} // \overline{KB}$，且$\overline{CM} = \overline{BK}$，所以四邊形$CMBK$為平行四邊形。

3. 證明長方形$LNBK$面積等於正方形$CBDE$面積，長方形$LNAH$面積等於正方形$CAGF$面積：

   當ΔBCM的底長為$\overline{BC}$，高為$\overline{BD}$時，可得到ΔBCM面積$= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{BD}$，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形}LNBK\text{ 面積} &= \text{平行四邊形}CMBK\text{ 面積(同底同高)}\\ &= 2\Delta BCM \text{ 面積}\\ &= 2 \times (\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{BD})\\ &= \overline{BC} \times \overline{BD}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}.\end{aligned}$$

   同理

$$\begin{aligned}\text{長方形}LNAH\text{ 面積} &= 2\Delta HAC \text{ 面積}\\ &= 2 \times (\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{FC})\\ &= \overline{AC} \times \overline{FC}\\ &= \text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}LNBK\text{ 面積} + \text{長方形}LNAH\text{ 面積}\\ &= \text{平行四邊形}CMBK\text{ 面積} + 2\Delta HAC\text{ 面積}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{ 面積} + \text{正方形}CAGF\text{ 面積}\end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 14). Amsterdam: A. Versluys.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 71). Paris: Vuibert et Nony.

   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 14). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明方法是先將斜邊上的正方形分割成兩個矩形，透過輔助線的巧妙安排，利用三角形不同底高組合的面積表示法，將完全沒有共同邊的平行四邊形與矩形之間，找到相同的面積關係，最後整理完成了證明。此題的證明與 G128 接近，但相等面積的形狀轉換過程，比 G128 讓學生更容易了解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		