勾股定理證明-G128

【作輔助圖】

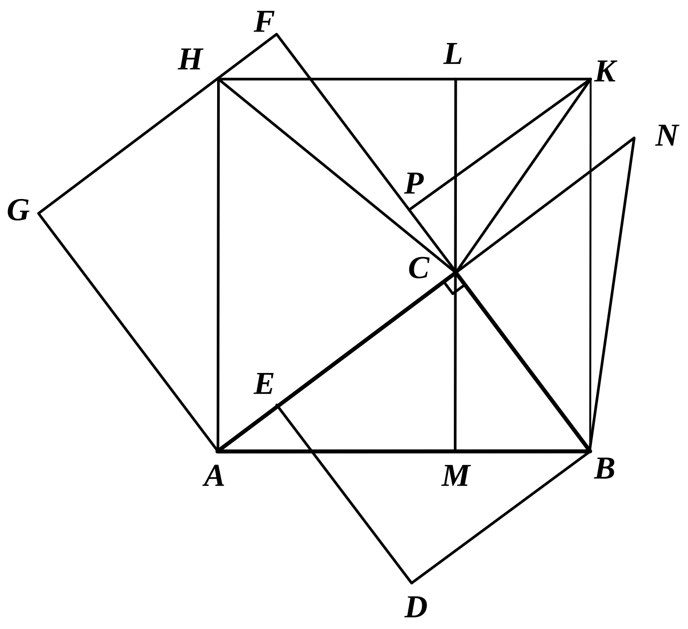
1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$ (於求證過程第 1 點可得點H在$\overline{GF}$上)。

2. 延長$\overline{AC}$使得$\overline{CN}=\overline{CB}$，連接$\overline{BN}$。

3. 從C點作$\overline{AB}$的垂線交於M點，且交$\overline{HK}$於L點。

4. 從K點作$\overline{NC}$的平行線與$\overline{CF}$交於P點。

5. 連接$\overline{CK}$與$\overline{CH}$。



【求證過程】

將正方形$ABKH$先分割成兩個矩形，透過輔助線將區域再進行切割，利用三角形不同底高組合的面積表示法，得到相同面積的區域轉換，最後推得畢氏定理關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，進一步得到點H在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}, \angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB, \overline{AG}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB(\text{SAS 全等}).$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上。

2. 證明長方形 $HAML$ 面積等於正方形 $CAGF$ 面積：

   當 ΔCAH 以 $\overline{CA}$ 為底，$\overline{CF}$ 為高時，得到 ΔCAH 面積為 $\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CF}$ ，因此

$$長方形HAML面積=2\times\Delta CAH面積=\overline{CA}\times\overline{CF}=正方形CAGF面積.$$

3. 證明三角形 PBK 與三角形 CAB 全等：

   因為 $\overline{KP}//\overline{NC}$ ，所以 $\angle KPB=\angle BCA=90^{\circ}$ ，又 $\angle KBP=90^{\circ}-\angle CBA=\angle BAC$ ，

   且 $\overline{KB}=\overline{BA}$ ，得到

$$\Delta PBK\cong\Delta CAB\,(\text{AAS 全等}).$$

4. 證明長方形 $KBML$ 面積等於正方形 $CBDE$ 面積：

   由證明 3.得到 $\overline{KP}=\overline{BC}=\overline{NC}$ ，所以當 ΔCBK 以 $\overline{CA}$ 為底，$\overline{CF}$ 為高時，得到

$$\Delta CBK\text{ 面積}=\frac{1}{2}\overline{CB}\times\overline{KP}=\frac{1}{2}\overline{CB}\times\overline{NC}=\frac{1}{2}\overline{CB}^{2},$$

   所以

$$長方形KBML面積=2\times\Delta CBK\text{ 面積}=\overline{CB}^{2}=正方形CBDE面積.$$

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}正方形AHKB面積&=長方形KBML面積+長方形HAML面積\\&=2\Delta CBK\text{ 面積}+2\Delta CAH\text{ 面積}\\&=正方形CBDE面積+正方形CAGF面積.\end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^{2}=\overline{CB}^{2}+\overline{CA}^{2},$$

   即

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 1 日想到的。
2. 心得：此證明方法是將斜邊上的正方形分割成兩個矩形，利用三角形底高面積表示

的轉換，將正方形與矩形之間，找到相同的面積關係，最後整理得到畢氏定理的證明。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題的圖形其實可以更簡化，並不需要作出 $\overline{CN}$ 與 $\overline{NB}$ 兩輔助線段，就可以將正方形與矩形之間，找到相同的面積關係，讓學生更直觀了解，但也可以利用這兩線段來看出等面積的形狀轉換過程。