勾股定理證明-G127

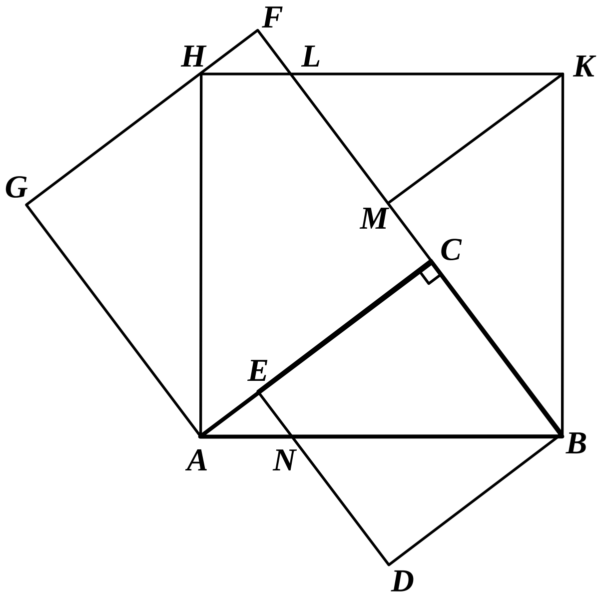
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $CAGF$ (於求證過程第 1 點可得點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. 從 K 點作 $\overline{AC}$ 的平行線與交 $\overline{CF}$ 於 M 點。

3. $\overline{DE}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 N 點。

4. $\overline{HK}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 L 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別作三個正方形，先證明正方形 $AHKB$ 所切割的區塊，能拼合成正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的區域，再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，進一步得到點 H 在 $\overline{GF}$ 上：

因為 $\overline{AH} = \overline{AB}, \angle GAH = 90^\circ - \angle HAC = \angle CAB, \overline{AG} = \overline{AC}$ ，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到 $\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又 $\angle FGA = 90^\circ$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上。

2. 證明三角形KMB與三角形HGA全等：

由線段的平行關係可得到$\angle HGA = \angle KMB$與$\angle HAG = \angle KBM$， 且$\overline{AH} = \overline{BK}$，所以

$$\Delta KMB \cong \Delta HGA \text{(AAS 全等)}.$$

進一步得到$\overline{MK} = \overline{GH} = \overline{BC} = \overline{DB}$.

3. 證明三角形MKL與三角形DBN全等：

由線段的平行關係可得到$\angle LMK = \angle NDB$與$\angle LKM = \angle NBD$，且由證明 1.可得知

$\overline{MK} = \overline{GH} = \overline{CB} = \overline{DB}$，所以

$$\Delta MKL \cong \Delta DBN \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形ANE與三角形HLF全等：

因為$\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{NB} = \overline{HK} - \overline{LK} = \overline{HL}$，且$\angle AEN = \angle HFL = 90^{\circ}$，由線段的平行關係可得到$\angle EAN = \angle FHL$，所以

$$\Delta ANE \cong \Delta HLF \text{(AAS 全等)}.$$

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{四邊形}NBCE\text{面積} + \Delta MKL\text{面積} \\
&\quad + \Delta KMB\text{面積} + \text{四邊形}ACLH\text{面積} + \Delta ANE\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}NBCE\text{面積} + \Delta DBN\text{面積}) \\
&\quad + (\Delta HGA\text{面積} + \text{四邊形}ACLH\text{面積} + \Delta HLF\text{面積}) \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}CAGF\text{面積}.
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.89). New York : Macmillan and co.

The Journal of Education, V. XXVIII, 1888, p. 17, 24th proof.

Heath’s Mathematical Monographs, No.2, 1900, p. 32, proof XIX.

2. 心得：此證明輔助線的畫法很特別地只有作一條平行的輔助線段，因為利用正方形的直角與邊長相等的特性，可容易由互餘關係得到對應角相等，也得到了對應邊等長的關係，進一步證明圖形的全等。再完全由平移的拼圖方法，完成

面積的變換，此題證明圖形雖簡單明瞭，卻很巧妙的安排三個正方形的位置，讓學生體驗了拼圖操作的證明樂趣。(證明圖形分割的元件與 G025 相同)
＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	