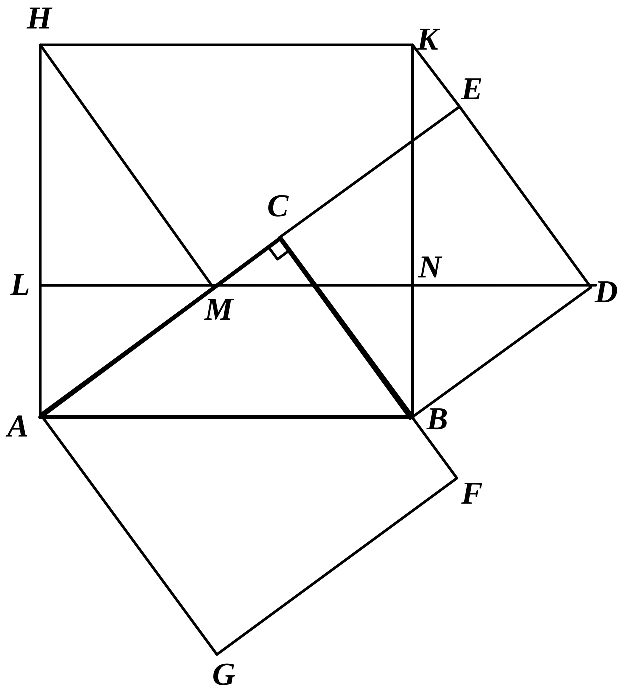
勾股定理證明-G118

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$CAGF$。
2. 連接$\overline{KE}$(於求證過程第 1 點可得$K-E-D$共線)。
3. 從D點作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{BK}$交於N點，與$\overline{CA}$交於M點，且與$\overline{HA}$交於L點。
4. 連接$\overline{HM}$。



【求證過程】

將正方形切割為兩矩形，再推移得到兩個平行四邊形，最後證明平行四邊形面積與正方形面積相等，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形KBD與三角形ABC全等，得到$K-E-D$共線：

因為$\overline{KB}=\overline{AB}, \angle KBD=90^\circ-\angle CBK=\angle ABC$且$\overline{BD}=\overline{BC}$，所以

$$\Delta KBD\cong\Delta ABC\text{ (SAS 全等)},$$

得到$\angle KDB=\angle ACB=90^\circ$，又$\angle BDE=90^\circ$，所以

$$K-E-D\text{ 共線。}$$

2. 證明$\overline{HM}$垂直$\overline{AC}$：

四邊形$ABDM$中，由作圖3.知$\overline{AB}//\overline{MD}$，又已知$\overline{AM}//\overline{BD}$，所以四邊形$ABDM$為平行四邊形，又因為$\overline{HK}//\overline{AB}//\overline{MD}$，且$\overline{HK}=\overline{AB}=\overline{MD}$，所以四邊形$HMDK$亦為平行四邊形，得到$\overline{HM}//\overline{KD}$，所以$\angle HME=\angle DEC=90^\circ$，即

$$\overline{HM}\text{ 垂直 }\overline{AC}\ .$$

3. 證明四邊形$HMEK$與四邊形$AGFB$全等：
因為

$$\overline{HK}=\overline{AB},\overline{HM}=\overline{KD}=\overline{AC}=\overline{AG},\angle KEM=\angle BFG,\angle HME=\angle AGF,$$

$$\overline{ME}=\overline{MC}+\overline{CE}=\overline{MC}+\overline{BD}=\overline{MC}+\overline{AM}=\overline{GF},$$

$$\overline{KE}=\overline{KD}-\overline{ED}=\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{CF}-\overline{BC}=\overline{BF},$$

所以

$$\text{四邊形}HMEK\cong\text{四邊形}AGFB.$$

4. 證明平行四邊形$ABDM$與正方形$CBDE$面積相等，平行四邊形$HKDM$與正方形$CAGF$面積相等：

因為平行四邊形$ABDM$之底長為$\overline{BD}$，高為$\overline{BC}$，所以

$$\text{平行四邊形}ABDM\text{面積}=\overline{BD}\times\overline{BC}=\text{正方形}CBDE\text{面積}.$$

將平行四邊形$HKDM$經過切割，可拼合得到

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}HKDM\text{ 面積}&=\text{四邊形}HMEK\text{ 面積}+\Delta EMD\text{ 面積}\\&=\text{四邊形}AGFB\text{ 面積}+\Delta CAB\text{ 面積}\\&=\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{ 面積}&=\text{長方形}LABN\text{ 面積}+\text{長方形}LHKN\text{ 面積}\\&=\text{平行四邊形}ABDM\text{ 面積}+\text{平行四邊形}HKDM\text{ 面積}\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 73-74.
2. 心得：先將正方形 *AHKB* 橫向切割成兩個矩形，因為同底同高的推移關係，得到長方形 *LABN* 與正方形 *CBDE* 面積相等，又經過切割與拼合的方法，得到長方形 *LHKN* 的面積也與正方形 *CAGF* 的面積相等，此證明結合了兩種不同的方式，證明了長方形與正方形面積相等的關係，也值得應用在教學上。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	