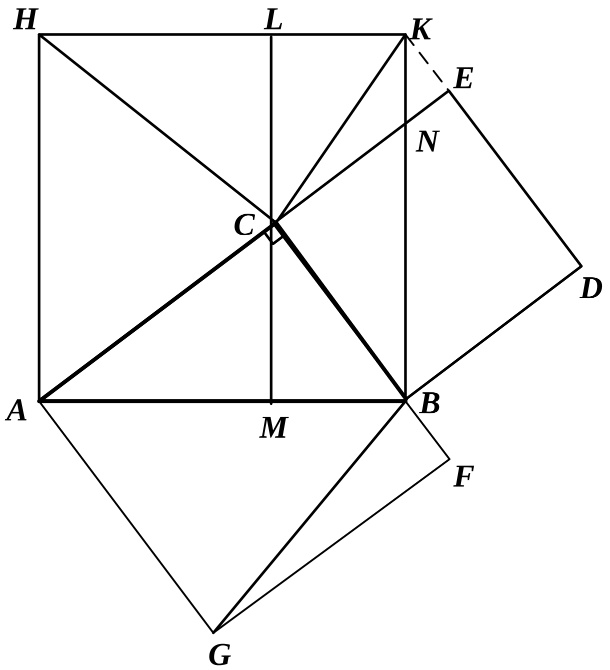
勾股定理證明-G117

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{AB}$的垂線交於M點，且交$\overline{HK}$於L點。
3. 連接$\overline{KE}$(於求證過程第 1 點可得$K-E-D$三點共線)。
4. 連接$\overline{BG}$，$\overline{KC}$與$\overline{HC}$。



【求證過程】

利用作圖所產生的分割，先透過三角形CBK適當的底高面積表示結果，得到長方形$LMBK$面積等於正方形$CBDE$面積的關係，再由三角形全等的關係來轉換區域得到長方形$HAML$面積等於正方形$CAGF$面積的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明$E-D-K$三點共線：

   因為$\overline{KB}=\overline{AB}, \angle KBD=90^\circ-\angle CBK=\angle ABC, \overline{BD}=\overline{BC}$，所以$\Delta KBD\cong\Delta ABC$ (SAS 全等)，得到$\angle BDK=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle BDE=90^\circ$，因此

   $$K-E-D\text{共線}.$$

2. 透過三角形CBK面積的計算，得到長方形$LMBK$面積等於正方形$CBDE$面積：

由證明 1. $K-E-D$ 共線關係，得到 ΔCBK 以 $\overline{CB}$ 為底長時，$\overline{CE}$ 則為高，所以

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}LMBK\text{面積} &= 2\times\Delta CBK\text{面積} \\
&= 2\times(\frac{1}{2}\overline{CB}\times\overline{CE}) \\
&= \overline{CB}\times\overline{CE} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積}.
\end{aligned}
$$

3. 先證明三角形 HAC 與三角形 BAG 全等，進一步得到長方形 $HAML$ 面積等於正方形 $CAGF$ 面積：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}, \angle HAC = 90^\circ - \angle CAB = \angle BAG, \overline{AC}=\overline{AG}$ ，所以

$$\Delta HAC \cong \Delta BAG \text{(SAS 全等)},$$

得到

$$\Delta HCA\text{面積}=\Delta BAG\text{面積}=\frac{1}{2}\overline{AG}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\text{正方形}CAGF\text{面積}.$$

因此

$$\text{長方形}HAML\text{面積}=2\times\Delta BAG\text{面積}=\overline{AG}\times\overline{AC}=\text{正方形}CAGF\text{面積}.$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}LMBK\text{面積}+\text{長方形}HAML\text{面積} \\
&= 2\Delta CBK\text{面積}+2\Delta HCA\text{面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積}.
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：

(1) J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 14). Leipz.: Friese.

(2) Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.162). New York : Macmillan and co.

(3) Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 73-74.

(4) Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 14). Amsterdam: A. Versluys.
(5) E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 71). Paris: Vuibert et Nony.
(6) J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, 2(3), 13.

2. 心得：此證明圖形簡單明瞭，很巧妙的利用三個正方形的位置，透過輔助線將長方形面積轉移為三角形面積的計算，進而推得相對應的正方形面積。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：在魯米斯書中所繪的圖形並沒有線段$\overline{KE}$，但證明中缺少此線段，將很難說明其三角形面積的表示結構之由來，因此在此證明中加補此線段，透過證明$K-E-D$共線的關係，確定三角形CBK高的位置。