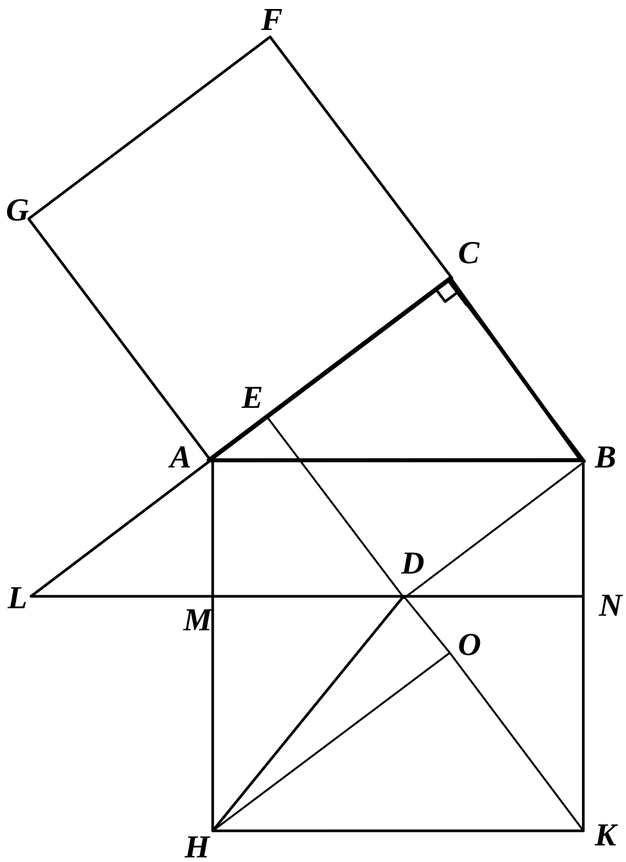
勾股定理證明-G116

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從D點作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{CA}$延長線交於L點，與$\overline{AH}$交於M點，與$\overline{BK}$交於N點。
3. 連接$\overline{DK}$ (於證明過程第 1 點說明$E-D-K$三點共線)。
4. 連接$\overline{DH}$。
5. 從H點作$\overline{AC}$的平行線與$\overline{DK}$交於O點。



【求證過程】

證明正方形$AHKB$所切割出的區塊中，將長方形$AMNB$透過推移的方式，先變成平行四邊形，由同底同高的面積計算關係，得到與正方形$CBDE$面積相等，再利用適當的輔助線，得到長方形$MHKN$的面積可透過三角形HDK的面積來轉換表示法，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，進而得到 $E-D-K$ 三點共線：

因為 $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\overline{BK}=\overline{BA}$, $\angle DBK=90^\circ-\angle DBA=\angle CBA$ ，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB\,(\text{SAS 全等}).$$

得到 $\angle BDK=\angle BCA=90^\circ$，所以 $\angle BDK+\angle BDE=180^\circ$，所以

$$E-D-K\text{ 三點共線。}$$

2. 證明三角形 OHK 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{HO}\,//\,\overline{AC}$，所以 $\angle ACB=\angle HOK$，由證明 1.知 $\overline{DK}\,//\,\overline{CB}$，所以 $\angle OKH=\angle CBA$，

又 $\overline{HK}=\overline{AB}$ ，因此

$$\Delta OHK\cong\Delta CAB\,(\text{AAS 全等}).$$

3. 透過推移與同底同高的面積計算，得到長方形 $AMNB$ 面積與正方形 $CBDE$ 面積相等：

由平行關係得到長方形 $AMNB$ 面積等於平行四邊形 $ALDB$ 面積，又

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形}ALDB\text{ 面積}&=\overline{DB}\times\overline{DE}\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積},\end{aligned}$$

所以

$$\text{長方形}AMNB\text{ 面積}=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}.$$

4. 以三角形 DHK 面積的表示法，得到長方形 $MHKN$ 面積與正方形 $CAGF$ 面積相等：

在 ΔDHK 中，以 $\overline{DK}$ 為底長， $\overline{HO}$ 為高，得到

$$\Delta DHK\text{ 面積}=\frac{1}{2}\times\overline{DK}\times\overline{HO}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AC}$$

所以

$$\begin{aligned}\text{長方形}MHKN\text{ 面積}&=2\Delta DHK\text{ 面積}\\&=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{DK}\times\overline{HO})\\&=\overline{AC}\times\overline{AC}\\&=\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積}&=\text{長方形}AMNB\text{ 面積}+\text{長方形}MHKN\text{ 面積}\\&=\text{平行四邊形}ALDB\text{ 面積}+2\Delta DHK\text{ 面積}\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 1 日想到的。.
2. 心得：此證明透過平行的切割作圖，利用圖形底長與高的結構，由計算面積的過程中將等長的線段取代原來的面積表示法，即可推得相對應的面積相等關係。因為運用了推移的技巧，因此無法使用於拼圖方法來證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 說明：證明 G109，G112 與 G116 的作圖中，以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形上皆不存在任何輔助線。