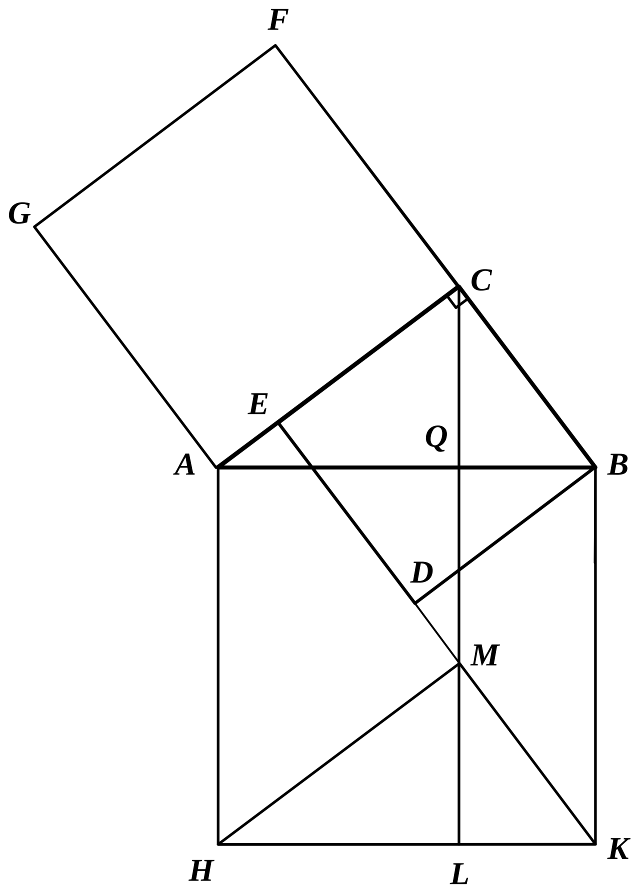
勾股定理證明-G112

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C作$\overline{HK}$的垂線交於L點，且交$\overline{AB}$於Q點。
3. 連接$\overline{DK}$ (於求證第 2 點可得 E-D-K 共線)，與$\overline{CL}$交於M點。
4. 連接$\overline{HM}$ (於求證第 5 點可得四邊形$AHMC$為平行四邊形)。



【求證過程】

將正方形$AHKB$所切割出的兩個長方形，透過推移的概念，得到相同面積的兩個平行四邊形，再經過與正方形同底等高的關係，分別得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形DKB與三角形CAB全等：

   因為$\overline{DB}=\overline{CB}, \overline{KB}=\overline{AB}, \angle KBD = 90^\circ - \angle DBA = \angle ABC$， 所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB\,(\text{SAS 全等}).$$

2. 先證明 E-D-K 共線，得到四邊形 $BCMK$ 為平行四邊形：

   由證明結果 $\Delta DKB \cong \Delta CAB$ 得到 $\angle BDK = \angle BCA = 90^\circ$，所以 $\angle BDK + \angle BDE = 180^\circ$，因此可知

   $$E\text{-}D\text{-}K \text{ 共線，}$$

   得到 $\overline{DK} \,//\, \overline{CB}$，又 $\overline{BK} \,//\, \overline{CM}$，所以

   $$\text{四邊形 } BCMK \text{ 為平行四邊形。}$$

3. 證明長方形 $BKLQ$ 與正方形 $CBDE$ 面積相等：

   長方形 $BKLQ$ 與平行四邊形 $BKMC$ 同底長 $\overline{BK}$ 與高 $\overline{BQ}$，得到相等面積。又平行四邊形 $BKMC$ 的底長為 $\overline{BC}$，高為 $\overline{BD}$ 時，得到與正方形 $CBDE$ 相同面積，所以

   $$\begin{aligned}\text{長方形}BKLQ\text{ 面積} &= \text{平行四邊形}BCMK\text{ 面積}\\ &= \overline{BC}\times\overline{BD}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}.\end{aligned}$$

4. 證明三角形 ABC 與三角形 MCE 全等，得到 $\overline{ME} = \overline{AC}$：

   由 $\Delta DKB \cong \Delta CAB$ 與四邊形 $BCMK$ 為平行四邊形的證明結果，得到

   $$\overline{CM} = \overline{BK} = \overline{BA},$$

   又 $\overline{EC} = \overline{CB}, \angle CEM = \angle BCA = 90^\circ$，所以 $\Delta ABC \cong \Delta MCE$ (RHS 全等)，得到

   $$\overline{ME} = \overline{AC}.$$

5. 先證明四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形，再證明長方形 $AHLQ$ 與正方形 $CAGF$ 面積相等：

   由平行四邊形 $BKMC$ 得到 $\overline{CM} = \overline{BK} = \overline{AH}$，又 $\overline{CM} \,//\, \overline{AH}$，可得到四邊形 $AHMC$ 亦為平行四邊形，又由證明結果 $\overline{ME} = \overline{AC}$，利用同底等高的關係，推得

   $$\begin{aligned}\text{長方形}AHLQ\text{面積} &= \text{平行四邊形}AHMC\text{面積}\\ &= \overline{AC}\times\overline{ME}\\ &= \overline{AC}\times\overline{AC}\\ &= \text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$AHKB$面積＝長方形$BKLQ$面積＋長方形$AHLQ$面積
＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2\ .$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 1 日想到的。
2. 心得：此證明完全利用了面積的代數運算而證得，沒有使用任何的圖形拼圖概念。過程中透過圖形的底長與高的結構，運用了不同的面積計算表示法，來間接說明長方形與正方形面積相等的推移關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 說明：證明 G109，G112 與 G116 的作圖中，以$\overline{AC}$為邊的正方形上皆不存在任何輔助線。