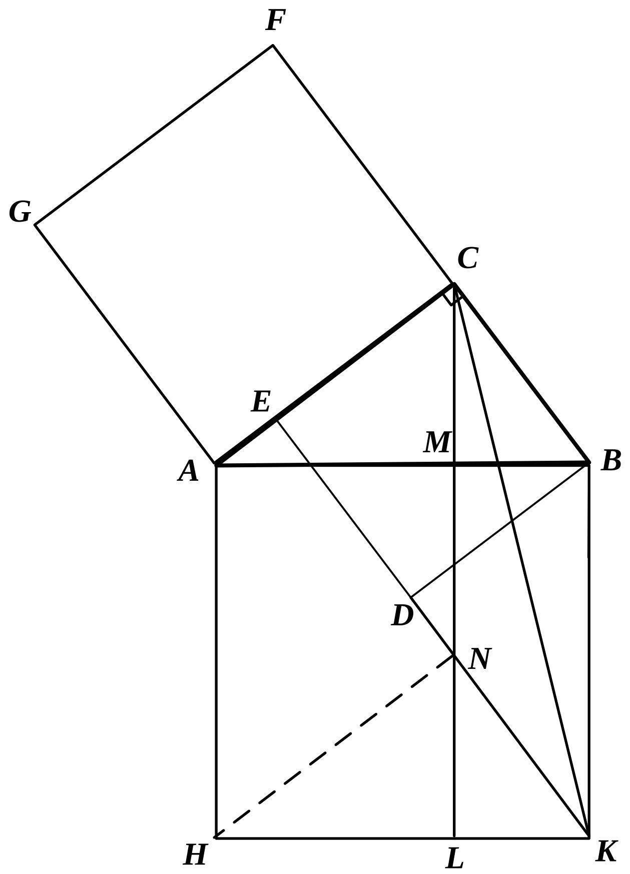
勾股定理證明-G109

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 連接$\overline{DK}$ (於證明過程第 1 點說明$E-D-K$ 三點共線)。
3. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於L點，且與$\overline{AB}$交於M點，與$\overline{DK}$交於N點。
4. 連接$\overline{CK}$，$\overline{HN}$。



【求證過程】

利用作圖所產生的分割，先透過三角形適當的底高面積表示結果，得到長方形面積等於正方形面積的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形DKB與三角形CAB全等，由此推得$E-D-K$三點共線：

   因為$\overline{BD}=\overline{BC}, \overline{BK}=\overline{BA}, \angle DBK = 90^\circ - \angle DBA = \angle CBA$，所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

由此得到$\angle BDK = \angle BCA = 90^\circ$，所以$\angle BDK + \angle BDE = 180^\circ$，因此可知

$$E - D - K \text{ 三點共線。}$$

2. 由$\overline{CL}$平行$\overline{BK}$，且$\overline{DK}$平行$\overline{CB}$的關係，得到三角形BCK面積的兩種表示法，進而推得長方形$BMLK$面積與正方形$CBDE$面積相等：

當ΔBCK底長為$\overline{BK}$，高為$\overline{LK}$時，ΔBCK面積為$\frac{1}{2}\overline{BK}\times\overline{LK}$；當底長為$\overline{BC}$，高為$\overline{BD}$時，$\Delta BCK$面積為$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}$，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}BMLK\text{ 面積} &= \overline{BK}\times\overline{LK}\\ &= 2\Delta BCK\text{ 面積}\\ &= 2(\tfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD})\\ &= \overline{BC}\times\overline{BD}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}.\end{aligned}$$

3. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：
(長方形 $AHLM$ 面積與正方形$CAGF$ 面積相等在補充中說明)

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{ 面積} &= \text{長方形}BMLK\text{ 面積}+\text{長方形}AHLM\text{ 面積}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 12). Amsterdam: A. Versluys.

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 11). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明完全利用了面積的代數運算而證得，沒有使用任何的圖形拼圖概念。過程中利用了圖形的底長與高的結構，運用了不同的面積計算表示法，來間接說明長方形與正方形面積相等的推移關係，此不同的角度可以讓學生感受到不同的思考面向。但原證明過程並沒有作虛線$\overline{HN}$此輔助線，也並沒有清楚證明為何有長方形$AHLM$面積與正方形$CBDE$面積相等的原因，所以需要再作補充說明，並增加$\overline{HN}$此輔助線。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：長方形$AHLM$面積與正方形$CAGF$面積相等的證明，在 Loomis 書中僅簡單說明帶過而已，在此補充證明：

(1) $\overline{DK}$與$\overline{CL}$交於N點，連接$\overline{HN}$。

(2)證明ΔABC與ΔNCE全等，進而得到$\overline{NE}=\overline{AC}$：

因為$\overline{EC}=\overline{CB}, \angle CEN=\angle BCA=90^o$，又因為

$$\angle CAB=90^{\circ}-\angle ACM=\angle ENC,$$

所以$\Delta ABC\cong\Delta NCE$（AAS 全等），得到

$$\overline{NE}=\overline{AC}..$$

(3)證明長方形$AHLM$與正方形$CAGF$面積相等：

因為$\overline{CN}=\overline{BA}=\overline{AH}$，又$\overline{AH}$平行$\overline{CN}$，所以四邊形$AHNC$為平行四邊形，利用同底等高的關係，推得

長方形$AHLM$面積＝平行四邊形$AHNC$面積

＝$\overline{AC}\times\overline{NE}$

＝$\overline{AC}\times\overline{AC}$

＝正方形$CAGF$面積.