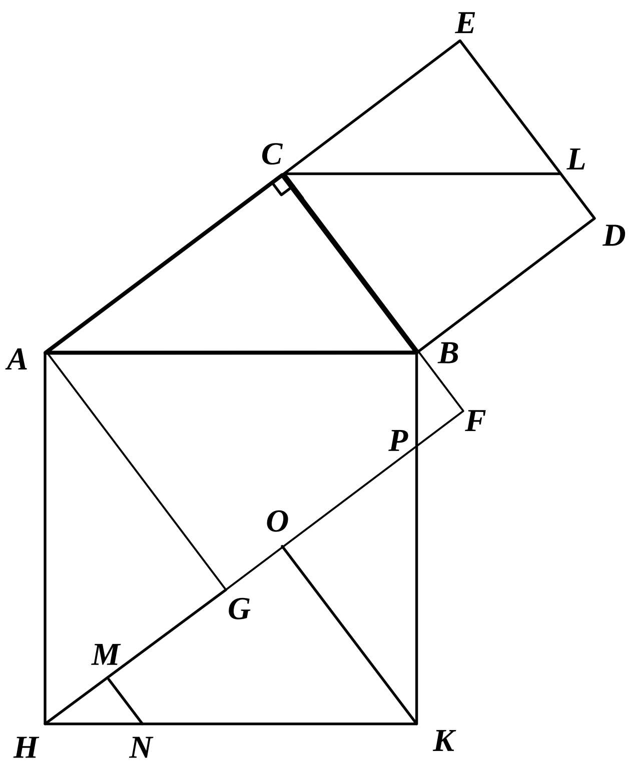
勾股定理證明-G108

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{ED}$交於L點。
3. 連接$\overline{HG}$(於求證過程第1點可得$H-G-F$共線)。
4. 從K點作$\overline{BC}$的平行線與$\overline{GF}$交於O點。
5. 在$\overline{HG}$上取一點M，使得$\overline{HM}=\overline{BF}$。
6. 從M點作$\overline{CB}$的平行線與$\overline{HK}$交於N點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別作三個正方形，先證明正方形$AHKB$所切割的區塊，能拼合成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域，再由面積相等的關係，最後推出畢

氏定理的關係式。

1. 證明三角形GAH與三角形CAB全等，進一步得到$H-G-F$三點共線：

因為$\overline{GA}=\overline{CA}, \overline{AH}=\overline{AB}, \angle GAH=90^{\circ}-\angle BAG=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

進而得到$\angle AGH=\angle ACB=90^{\circ}$，所以$\angle AGH+\angle AGF=180^{\circ}$，因此可知

$$H-G-F \text{ 三點共線。}$$

2. 先證明三角形OHK與三角形CAB全等，進而得到$\overline{OK}=\overline{CE}$：

因為$\overline{HF}//\overline{AC}$、$\overline{KO}//\overline{BC}$且$\overline{HK}//\overline{AB}$，得到$\angle OHK=\angle CAB$且$\angle OKH=\angle CBA$，又

$\overline{HK}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta OHK \cong \Delta CAB \text{(ASA 全等)},$$

進而得到

$$\overline{OK}=\overline{CB}=\overline{EC}.$$

3. 證明三角形OKP與三角形ECL全等：

因為

$\angle LEC=\angle POK=90^{\circ}, \angle OKP=90^{\circ}-\angle OKH=\angle OHK=\angle CAB=\angle ECL, \overline{OK}=\overline{EC}$，

所以

$$\Delta OKP \cong \Delta ECL \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形MHN與三角形FBP全等：

因為

$\angle HMN=\angle BFP=90^{\circ}, \angle MHN=90^{\circ}-\angle AHG=90^{\circ}-\angle ABC=\angle FBP, \overline{HM}=\overline{BF}$，

所以

$$\Delta MHN \cong \Delta FBP \text{(ASA 全等)}.$$

5. 證明四邊形$OMNK \cong$四邊形$BDLC$：

因為

$\angle NKO=\angle LCB, \overline{KO}=\overline{CB}, \angle KOM=\angle CBD=90^{\circ}$,

$\overline{OM}=\overline{OH}-\overline{HM}=\overline{CF}-\overline{BF}=\overline{CB}=\overline{BD}, \angle OMN=\angle BDL=90^{\circ}$，所以

$$\text{四邊形}OMNK \cong \text{四邊形}BDLC.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{ 面積} &= \Delta GAH\text{ 面積} + \Delta MHN\text{ 面積} + \text{四邊形}OMNK\text{ 面積} \\
&\quad + \Delta OKP\text{ 面積} + \text{四邊形}AGPB\text{ 面積} \\
&= \Delta CAB\text{ 面積} + \Delta FBP\text{ 面積} + \text{四邊形}BDLC\text{ 面積} \\
&\quad + \Delta ECL\text{ 面積} + \text{四邊形}AGPB\text{ 面積} \\
&= (\text{四邊形}BDLC\text{ 面積} + \Delta ECL\text{ 面積}) \\
&\quad + (\text{四邊形}AGPB\text{ 面積} + \Delta CAB\text{ 面積} + \Delta FBP\text{ 面積}) \\
&= \text{正方形}CBDE\text{ 面積} + \text{正方形}CAGF\text{ 面積}
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 12 月想到的。
2. 心得：此證明圖形分割的元件與 G127 相同，利用了正方形直角的特性，找出互餘關係得到全等圖形的對應角相等，再搭配對應邊等長的關係得到全等圖形的條件。但與 G127 有不同的拼圖方式，除了平移還需要利用旋轉的技巧，最後得到了三個正方形面積之間的畢氏定理關係。此題證明圖形可以讓學生體驗了拼圖操作的證明樂趣。 (此圖形分割的元件與 G026 有四塊相同)。＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	