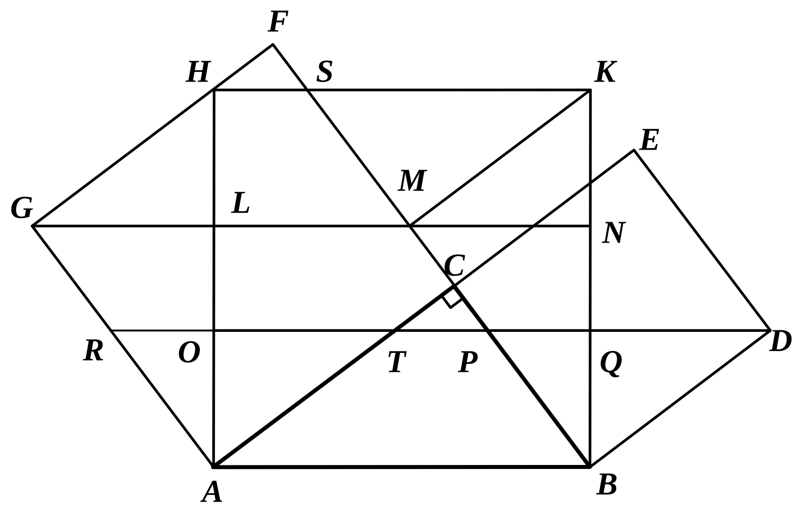
勾股定理證明-G076

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$ (於求證過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。
2. $\overline{CF}$與$\overline{HK}$交於S點。
3. 從G點作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{AH}$交於L點，與$\overline{CF}$交於M點，與$\overline{BK}$交於N點。
4. 從D點作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{BK}$交於Q點，與$\overline{CB}$交於P點，與$\overline{AC}$交於T點，與$\overline{AH}$交於O點，與$\overline{AG}$交於R點。
5. 連接$\overline{MK}$。



【求證過程】

將正方形$ABKH$橫向切割為三個矩形，先找出與長方形等面積推移後的平行四邊形面積，再繼續運用了底高的面積計算與切割重新拼圖的方法，推得對應的區域面積。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，進一步得到點H在$\overline{GF}$上：

   因為$\overline{AG}=\overline{AC}, \angle GAH = 90^{\circ} - \angle HAC = \angle CAB, \overline{AH}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

得到$\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又$\angle FGA = 90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上。

2. 證明三角形CTP與三角形FHS全等：

由證明 1.得到$\overline{GH} = \overline{CB}$，且由平行關係知四邊形$ABDT$為平行四邊形，得到

$\overline{BD} = \overline{AT}$，所以可得$\overline{GH} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{AT}$，進一步可推得

$\overline{FH} = \overline{GF} - \overline{GH} = \overline{AC} - \overline{AT} = \overline{CT}$，由平行關係可得到

$\angle FHS = \angle CTP, \angle HFS = 90^\circ = \angle TCP$，所以

$$\Delta CTP \cong \Delta FHS \text{(ASA 全等)}.$$

3. 證明$\overline{MK}$平行$\overline{GH}$：

由平行關係可得知四邊形$ABMG$為平行四邊形，因為$\overline{HK} // \overline{AB} // \overline{GM}$，又

$\overline{HK} = \overline{AB} = \overline{GM}$，所以四邊形$HGMK$亦為平行四邊形，因此$\overline{MK}$平行$\overline{GH}$.

4. 證明三角形MKS與三角形ATR全等：

由證明 3．平行關係得知$\angle SMK = 90^\circ = \angle RAT$與$\angle MSK = \angle ART$，又

$\overline{KS} = \overline{HK} - \overline{HS} = \overline{RP} - \overline{TP} = \overline{TR}$，所以

$$\Delta MKS \cong \Delta ATR \text{(AAS 全等)}.$$

5. 證明長方形$ABQO$面積等於正方形$CBDE$面積：

長方形$ABQO$面積＝平行四邊形$ABDT$面積(同底同高)

＝$\overline{BD} \times \overline{BC}$

＝正方形$CBDE$面積.

6. 證明長方形$OQKH$面積等於正方形$CAGF$面積：

由平行關係可得知四邊形$ABPR$、四邊形$RPMG$均為平行四邊形，所以

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}OQNL\text{ 面積} &= \overline{AB}\times\overline{OL} \\
&= \overline{RP}\times\overline{OL} \\
&= \text{平行四邊形}RPMG\text{ 面積(等底同高)} \\
&= \text{五邊形}RTCMG\text{ 面積}+\Delta CTP\text{ 面積} \\
&= \text{五邊形}RTCMG\text{ 面積}+\Delta FHS\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}LNKH\text{ 面積} &= \text{平行四邊形}GMKH\text{ 面積(等底同高)} \\
&= \text{四邊形}GMSH\text{ 面積}+\Delta MKS\text{ 面積} \\
&= \text{四邊形}GMSH\text{ 面積}+\Delta ATR\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}OQKH\text{ 面積} &= \text{長方形}OQNL\text{ 面積}+\text{長方形}LNKH\text{ 面積} \\
&= (\text{五邊形}RTCMG\text{ 面積}+\Delta FHS\text{ 面積}) \\
&\quad +(\text{四邊形}GMSH\text{ 面積}+\Delta ATR\text{ 面積}) \\
&= \text{正方形}CAGF\text{ 面積}
\end{aligned}
$$

7. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{ 面積} &= \text{長方形}ABQO\text{ 面積}+\text{長方形}OQKH\text{ 面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}\ .
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 12). Amsterdam: A. Versluys.
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(10), 250-251.
2. 心得：此題作圖與 G075 類似，但證明的過程繁瑣許多，學生了解較為不易。證明方法是將最大的正方形橫向切割為三個矩形，先運用底高的面積計算，找出長方形 *ABQO* 推移後的平行四邊形 *ABDT* 面積，再繼續推得正方形 *CBDE* 的面積。而正方形 *CAGF* 面積求法，除了同樣運用兩個矩形的推移概念得到平行四邊形區域外，還需再加上了拼圖的平移技巧，而輔助線切割的過程中要

證明對應的區域全等，對中學生而言是需要專注與耐心的。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	