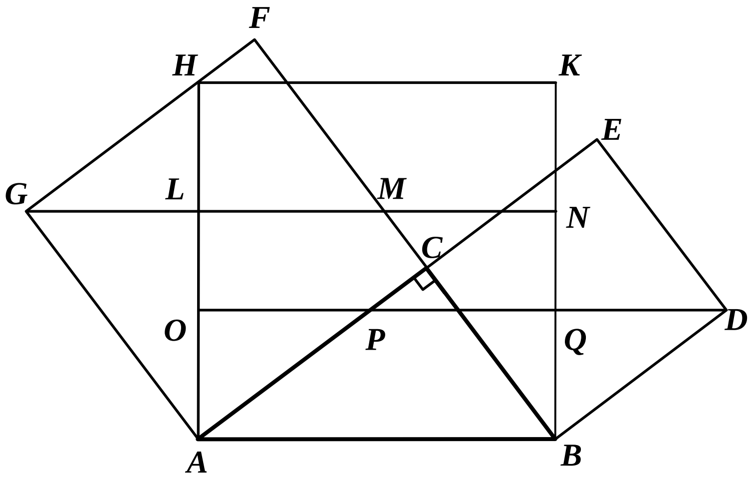
勾股定理證明-G075

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$ (於求證過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 從G作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{AH}$交於L點，與$\overline{CF}$交於M點，與$\overline{BK}$交於N點。

3. 從D作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{AH}$交於O點，與$\overline{CA}$交於P點，與$\overline{KB}$交於Q點。



【求證過程】

將最大的正方形做橫向切割，利用全等圖形關係找出等長的線段關係，最後計算出兩個矩形面積分別與兩正方形面積相等，即得到畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，得到點H在$\overline{GF}$上：

   因為$\overline{AH}=\overline{AB}, \overline{AG}=\overline{AC}, \angle GAH = 90^\circ - \angle HAC = \angle CAB$，所以

   $$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

   得到$\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又$\angle FGA = 90^\circ$，所以

   點H在$\overline{GF}$上，即$G-H-F$共線。

2. 先證明三角形HGL與三角形BDQ全等，進一步得到$\overline{HL}$與$\overline{BQ}$等長：

因為$\overline{GH}=\overline{CB}=\overline{DB}$，由線段$\overline{GF}\,//\,\overline{BD}$，$\overline{GN}\,//\,\overline{OD}$與$\overline{AH}\,//\,\overline{BK}$的平行關係，可得到

$\angle HGL=\angle BDQ, \angle GHL=\angle PAO=\angle DBQ$，所以

$$\Delta HGL\cong\Delta BDQ\,(\text{ASA 全等}).$$

得到

$$\overline{HL}=\overline{BQ}.$$

3. 證明正方形所切割的兩個矩形 *HLNK* 與 *LABN* 面積分別與兩正方形 *CBDE* 與 *CAGF* 面積相等：

因為$\overline{HL}=\overline{BQ}$，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形}HLNK\text{ 面積}&=\overline{HK}\times\overline{HL}\\&=\overline{AB}\times\overline{BQ}\\&=\text{長方形}OABQ\text{ 面積(等底等高)}\\&=\text{平行四邊形}PABD\text{ 面積(同底同高)}\\&=\overline{BD}\times\overline{BC}\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積.}\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\text{長方形}LABN\text{ 面積}&=\text{平行四邊形}GABM\text{ 面積(同底同高)}\\&=\overline{AG}\times\overline{AC}\\&=\text{正方形}CAGF\text{ 面積.}\end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{ 面積}&=\text{長方形}HLNK\text{ 面積}+\text{長方形}LABN\text{ 面積}\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積.}\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(10), 250-251.
2. 心得：輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，較容易看出對應角的相等關係，證明方法是將斜邊上的正方形做橫向切割，再運用底高的面積計算，找出長方形推移後的平行四邊形面積，再繼續推移得到正方形的面積。特別的是，推移的過程中會有重疊的區域，因此需另證明出等長的線段，才能將

重疊的區域轉移。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	