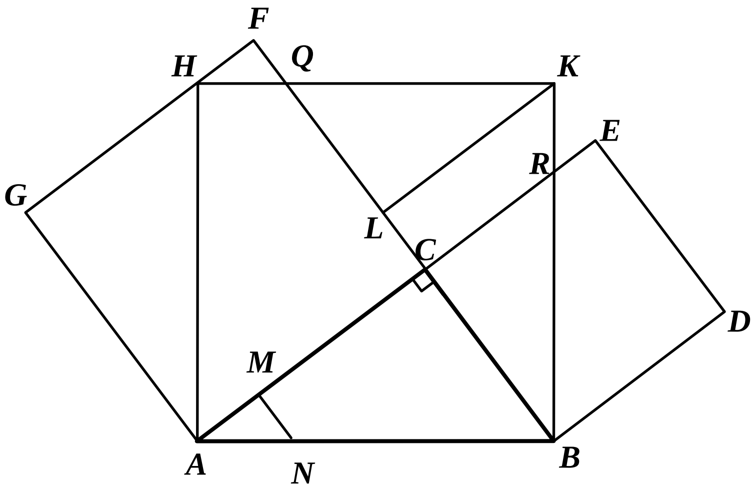
勾股定理證明-G074

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$ (於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。
2. $\overline{CF}$與$\overline{HK}$交於Q點，$\overline{BK}$與$\overline{CE}$交於R點。
3. 在$\overline{AC}$上取一點M，使得$\overline{CM}=\overline{DE}$，從$M$點作$\overline{CB}$的平行線與$\overline{AB}$交於$N$點。
4. 從K點作$\overline{AC}$的平行線與$\overline{CF}$交於L點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向上向外作正方形，證明正方形$AHKB$所切割出的區塊，可以拼合出正方形$CBDE$的區域與正方形$CAGF$的區域，由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再得到點H的位置在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)},$$

得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點H在$\overline{GF}$上。

2. 證明三角形 LBK 與三角形 GAH 全等：

因為 $\overline{BK}=\overline{AH}$，又由平行關係可得到 $\angle LKB=\angle GHA$ 與 $\angle KBL=\angle HAG$，所以

$$\Delta LBK\cong\Delta GAH \text{ (ASA 全等).}$$

3. 證明三角形 KQL 與三角形 BRC 全等：

因為 $\overline{BK}=\overline{AB}, \angle LBK=90^{\circ}-\angle ABC=\angle CAB$，由平行關係可得到

$\angle KLB=90^{\circ}=\angle BCA$，所以

$$\Delta BKL\cong\Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

進一步得到 $\overline{LK}=\overline{CB}$，又由平行關係可得到 $\angle QLK=90^{\circ}=\angle RCB$ 與

$\angle LKQ=90^{\circ}-\angle LKB=\angle CBR$，所以

$$\Delta KQL\cong\Delta BRC \quad \text{(ASA 全等).}$$

4. 證明三角形 ANM 與三角形 HQF 全等：

因為 $\overline{AM}=\overline{AC}-\overline{CM}=\overline{GF}-\overline{HG}=\overline{HF}$，且由平行關係得

$\angle AMN=\angle HFQ=90^{\circ}, \angle MAN=\angle FHQ$，所以

$$\Delta ANM\cong\Delta HQF \text{ (ASA 全等).}$$

5. 證明四邊形 $MNBC$ 與四邊形 $ERBD$ 全等：

因為對應邊 $\overline{CM}=\overline{DE}, \overline{CB}=\overline{DB}$，對應角

$\angle NMC=\angle RED=90^{\circ}, \angle MCB=\angle EDB=90^{\circ}, \angle NBC=90^{\circ}-\angle CBR=\angle RBD$，所以

$$\text{四邊形}MNBC\cong\text{四邊形}ERBD.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \Delta ANM\text{ 面積}+\text{四邊形}MNBC\text{面積}\\
&\quad +\Delta LBK\text{ 面積}+\Delta KQL\text{ 面積}+\text{四邊形}ACQH\text{ 面積}\\
&= \Delta HQF\text{ 面積}+\text{四邊形}ERBD\text{面積}+\Delta GAH\text{ 面積}\\
&\quad +\Delta BRC\text{ 面積}+\text{四邊形}ACQH\text{ 面積}\\
&= (\text{四邊形}ERBD\text{面積}+\Delta BRC\text{ 面積})+(\Delta HQF\text{面積}\\
&\quad +\Delta AHG\text{ 面積}+\text{四邊形}ACQH\text{ 面積})\\
&= \text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積.}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(10), 250-251.
2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，進一步證明對應的區域全等。此證明透過平移與旋轉的拼圖方法證明畢氏定理。
   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題作圖的輔助線畫法，與 G072 類似，差別只在於由不同的頂點所作的平行線段。