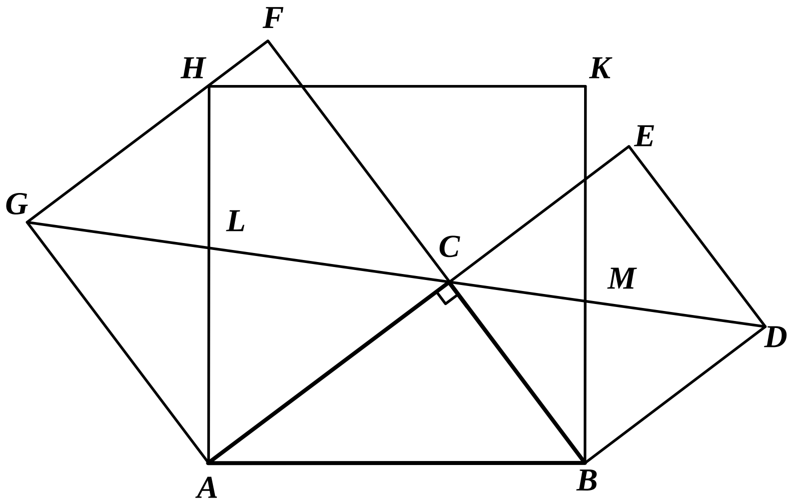
勾股定理證明-G073

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向內作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$ (於證明過程第 1 點說明點H在$\overline{GF}$上)。

2. 連接$\overline{CG}$與$\overline{CD}$(於證明過程第 2 點說明$G-C-D$共線)。

3. $\overline{AH}$與$\overline{CG}$交於L點，$\overline{BK}$與$\overline{CD}$交於M點



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別作三個正方形，證明正方形$AHKB$所切割出的兩塊全等四邊形，可以重新拼合成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域，由面積和相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形GAH與三角形CAB全等，再證明點H在$\overline{GF}$上：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}, \overline{AG}=\overline{AC}, \angle GAH=90^\circ-\angle HAC=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

由$\Delta GAH\cong\Delta CAB$可得到$\angle HGA=\angle BCA=90^\circ$，又$\angle FGA=90^\circ$，所以

點 H 在 $\overline{GF}$ 上。

2. 證明 $G-C-D$ 共線：

因為 $\overline{CG}, \overline{CD}$ 皆為正方形的對角線，所以

$$\angle GCA + \angle ACB + \angle BCD = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ, \text{得到}$$

$$G-C-D\text{共線。}$$

3. 證明三角形 HLG 與三角形 BMD 全等：

由證明結果 $\Delta GAH \cong \Delta CAB$ 知 $\overline{GH} = \overline{CB} = \overline{DB}$ ，又 $\overline{GF} // \overline{AE} // \overline{BD}$ 與 $\overline{AH} // \overline{KB}$ ，得到

$\angle GHL = \angle DBM$ 與 $\angle HGL = \angle BDM$ (內錯角相等)，因此

$$\Delta HLG \cong \Delta BMD \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $ABML$ 與四邊形 $KHLM$ 全等：

因為 $\overline{AB} = \overline{KH}$ ，又由 $\Delta HLG \cong \Delta BMD$ 得到 $\overline{BM} = \overline{HL}$ ，進一步得到 $\overline{AL} = \overline{KM}$ ，

加上 $\angle LAB = \angle MKH = 90^\circ$ 與 $\angle MBA = \angle LHK = 90^\circ$ ，所以

$$\text{四邊形}ABML \cong \text{四邊形}KHLM.$$

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形 $AHKB$ 面積＝2 四邊形 $ABML$ 面積
＝2(ΔACL 面積＋ΔABC 面積＋ΔCBM 面積)
＝2(ΔACL 面積＋ΔAHG 面積＋ΔCBM 面積)
＝2(ΔACL 面積＋ΔALG 面積＋ΔHLG 面積＋ΔCBM 面積)
＝2(ΔCBM 面積＋ΔBMD 面積)+2(ΔACL 面積＋ΔALG 面積)
＝正方形 $CBDE$ 面積＋正方形 $CAGF$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(10), 250-251.

2. 心得：由直角三角形 ABC 的兩股所作的正方形對角線，將正方形 $AHKB$ 一分為二，切割出兩塊全等四邊形，再透過旋轉重新作拼圖轉換位置，最後將其中一塊四邊形拼合成正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的一半區域，進而推導出畢式定理的關係式，這是很有創意的想法。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 說明：此證明作圖的特別之處，在於並沒有作出常見的延長線或是平行線，僅利用正方形對角線的切割而已，此題很適合作電腦動態說明，讓學生觀察其變換過程的美妙之處。