勾股定理證明-G072

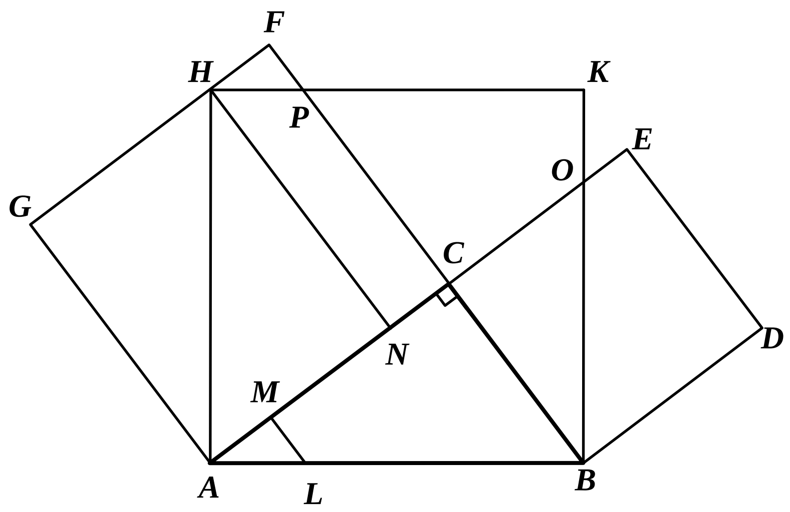
【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向內作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $CAGF$ (於證明過程第 1 點說明點 H 在 $\overline{GF}$ 上)。

2. $\overline{HK}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P 點，$\overline{BK}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 O 點。

3. 從 H 點作 $\overline{FC}$ 的平行線交 $\overline{AC}$ 於 N 點。

4. 在 $\overline{AB}$ 上取 L 點使 $\overline{AL}=\overline{HP}$，從 L 作 $\overline{BC}$ 的平行線與 $\overline{AC}$ 交於 M 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向上向外作正方形，證明正方形 $AHKB$ 所切割出的區塊，可以拼合出正方形 $CBDE$ 的區域與正方形 $CAGF$ 的區域，由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明點 H 在 $\overline{GF}$ 邊上：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}, \overline{AG}=\overline{AC}, \angle GAH = 90^\circ - \angle HAC = \angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB (\text{SAS 全等}).$$

得到 $\angle HGA = \angle BCA = 90^\circ$，又 $\angle FGA = 90^\circ$，所以

$$G-H-F$$ 共線。

2. 證明三角形 ALM 與三角形 HPF 全等：

   因為 $\overline{AL}=\overline{HP}$ ，且由平行關係 $\overline{AM}\,//\,\overline{HF}$ 、 $\overline{LM}\,//\,\overline{PF}$ 與 $\overline{HP}\,//\,\overline{AL}$ 得到對應角相等，

   所以
   $$\Delta ALM\cong\Delta HPF \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 證明四邊形 $LBCM$ 與四邊形 $OBDE$ 全等：

   因為 $\angle CML=\angle DEO=90^\circ, \angle CBL=90^\circ-\angle CBO=\angle DBO, \angle BCM=\angle BDE=90^\circ$，又

   $\overline{CB}=\overline{DB}$ ，且

   $$\overline{MC}=\overline{AC}-\overline{AM}=\overline{GF}-\overline{HF}=\overline{GH}=\overline{CB}=\overline{ED},$$

   所以
   $$\text{四邊形}LBCM\cong\text{四邊形}OBDE.$$

4. 證明三角形 NHA 與三角形 GAH 全等：
   由平行關係得到四邊形 $GANH$ 四頂角為直角，所以四邊形 $GANH$ 為長方形，因此
   $$\Delta NHA\cong\Delta GAH.$$

5. 證明四邊形 $KHNO$ 與四邊形 $HACP$ 全等：
   因為
   $\angle OKH=\angle PHA=90^\circ, \overline{KH}=\overline{HA}, \angle KHN=90^\circ-\angle NHA=\angle HAC, \overline{HN}=\overline{AC},$

   $\angle HNO=\angle ACP=90^\circ$，所以可推得

   $$\text{四邊形}KHNO\cong\text{四邊形}HACP.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

   正方形 $AHKB$ 面積＝(ΔALM＋四邊形 $LBCM$＋ΔOCB＋四邊形 $KHNO$＋ΔNHA)面積
   ＝(ΔHPF＋四邊形 $OBDE$＋ΔOCB＋四邊形 $HACP$＋ΔGAH)面積
   ＝(ΔOCB＋四邊形 $OBDE$)面積＋(ΔHPF＋四邊形 $HACP$＋ΔGAH)面積
   ＝正方形 $CBDE$ 面積＋正方形 $CAGF$ 面積.

   得到

   $$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在1934 年 3 月 26 日想到的。
2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，進一步證明對應的區域全等。此證明透過平移與旋轉的拼圖方法證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 說明：此題作圖的輔助線畫法與 G074 類似，差別只在於由不同的頂點所作的平行線段，但此題拼圖移動後的區域有重疊。我們可以利用這樣的想法，發現全等的形狀，等量消去同一區塊後得到不同形狀相同面積的四邊形與三角形，這是比較特別的創意發現。