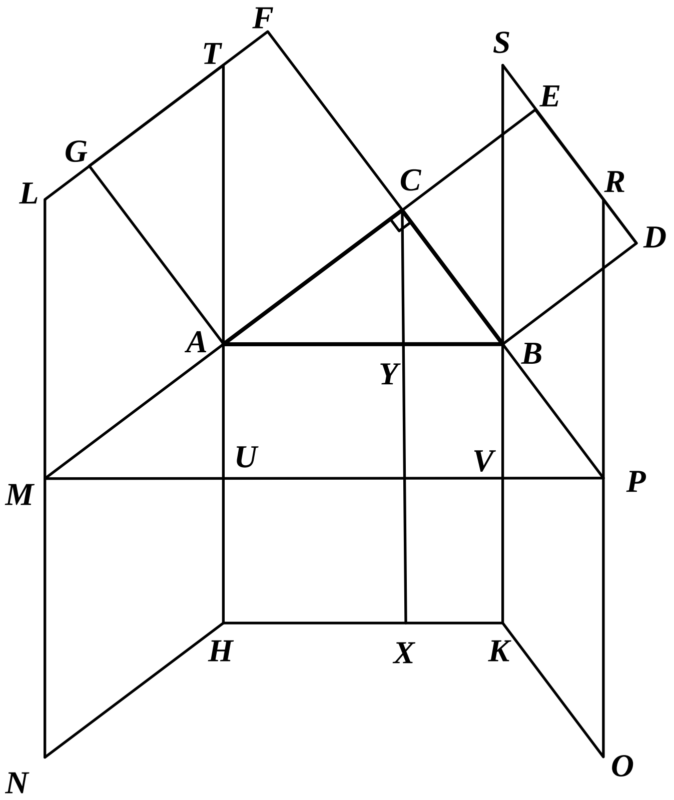
勾股定理證明-G067

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $CAGF$。
2. 從 C 點作 $\overline{BK}$ 的平行線與 $\overline{AB}$ 交於 Y 點，與 $\overline{HK}$ 交於 X 點。
3. 延長 $\overline{CA}$，使 $\overline{AM}=\overline{CA}$；延長 $\overline{CB}$，使 $\overline{BP}=\overline{CB}$。
4. 作平行四邊形 $AMNH$ 與平行四邊形 $BPOK$。
5. 延長 $\overline{FG}$ 與 $\overline{NM}$ 延長線交於 L 點；延長 $\overline{DE}$ 與 $\overline{KB}$ 延長線交於 S 點。
6. 延長 $\overline{HA}$ 與 $\overline{GF}$ 交於 T 點，延長 $\overline{OP}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 R 點。
7. 連接 $\overline{MP}$，交 $\overline{AH}$ 於 U 點，交 $\overline{BK}$ 於 V 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，將正方形 $AHKB$ 的區域切割為兩個長方形，由同底等高的關係得到相同面積的兩個平行四邊形，再經過平移並利用

平行四邊形與正方形同底等高的關係，分別得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明$\overline{AB}$與$\overline{MP}$平行：

   因為$\overline{AM}=\overline{CA}$且$\overline{BP}=\overline{CB}$，所以$A,B$分別為$\overline{CM},\overline{CP}$的中點，得到$\overline{AB}//\overline{MP}$.

2. 證明三角形AMU與三角形CAY全等，且三角形BPV與三角形CBY全等：

   因為$\overline{MP}//\overline{AB},\overline{AU}//\overline{CY}$，得到$\angle AUM=\angle CYA=90^\circ$且$\angle AMU=\angle CAY$，又

   $\overline{AM}=\overline{CA}$，所以

   $$\Delta AMU\cong\Delta CAY\,(\text{AAS 全等}).$$

   同理可得

   $$\Delta BPV\cong\Delta CBY\,(\text{AAS 全等}).$$

3. 證明ΔGAT與ΔCAB全等：

   因為$\angle TGA=\angle BCA=90^\circ,\overline{GA}=\overline{CA}$且$\angle GAT=90^\circ-\angle TAC=\angle CAB$，得到

   $$\Delta GAT\cong\Delta CAB\,(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明平行四邊形$AMNH$與平行四邊形$TLMA$面積相等：

   利用$\Delta GAT\cong\Delta CAB$的結果得知

   $$\overline{TA}=\overline{BA}=\overline{AH},$$

   又由作圖條件得到四邊形$AMNH$與四邊形$TLMA$皆為平行四邊形，因為底長

   $\overline{TA}=\overline{AH}$，且高同為$\overline{MU}$，由等底同高的關係得到平行四邊形$AMNH$與平行四邊形$TLMA$面積相等。

5. 證明三角形DSB與三角形CAB全等：

   同理，因為$\overline{BD}=\overline{BC},\angle SDB=\angle ACB=90^\circ$且$\angle SBD=90^\circ-\angle CBS=\angle ABC$，得到

   $$\Delta DSB\cong\Delta CAB\,(\text{ASA 全等}).$$

6. 證明平行四邊形$BPOK$與平行四邊形$SRPB$面積相等：

   利用$\Delta DSB\cong\Delta CAB$的結果得知

   $$\overline{SB}=\overline{AB}=\overline{BK},$$

   又由作圖條件得到四邊形$BPOK$與四邊形$SRPB$皆為平行四邊形，因為底長

   $\overline{SB}=\overline{BK}$，且高同為$\overline{PV}$，由等底同高的關係得到平行四邊形$BPOK$與平行四邊形$SRPB$面積相等。

7. 證明長方形 $AHXY$ 與平行四邊形 $AMNH$ 的面積相等，長方形 $BKXY$ 與平行四邊形 $BPOK$ 的面積相等：

因為 $\Delta AMU \cong \Delta CAY$，得到 $\overline{MU} = \overline{AY}$，由同底長 $\overline{AH}$ 與高 $\overline{MU} = \overline{AY}$ 的關係，

得到

長方形$AHXY$面積＝平行四邊形$AMNH$面積.

同理，因為 $\Delta BPV \cong \Delta CBY$，得到 $\overline{PV} = \overline{BY}$，由同底長 $\overline{BK}$ 與高 $\overline{PV} = \overline{BY}$ 的關係，

得到

長方形$BKXY$面積＝平行四邊形$BPOK$面積.

8. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：
利用底長相等與高相等的關係，得到

正方形$AHKB$面積＝長方形$BKXY$面積＋長方形$AHXY$面積
＝平行四邊形$BPOK$面積＋平行四邊形$AMNH$面積
＝平行四邊形$SRPB$面積＋平行四邊形$TLMA$面積
＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積.

所以

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍
J. M. Richardson(1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, *2*(2), 19.
2. 心得：此證明的輔助圖稍嫌繁雜，主要利用全等概念的平移操作與底高的面積計算推出畢氏定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	