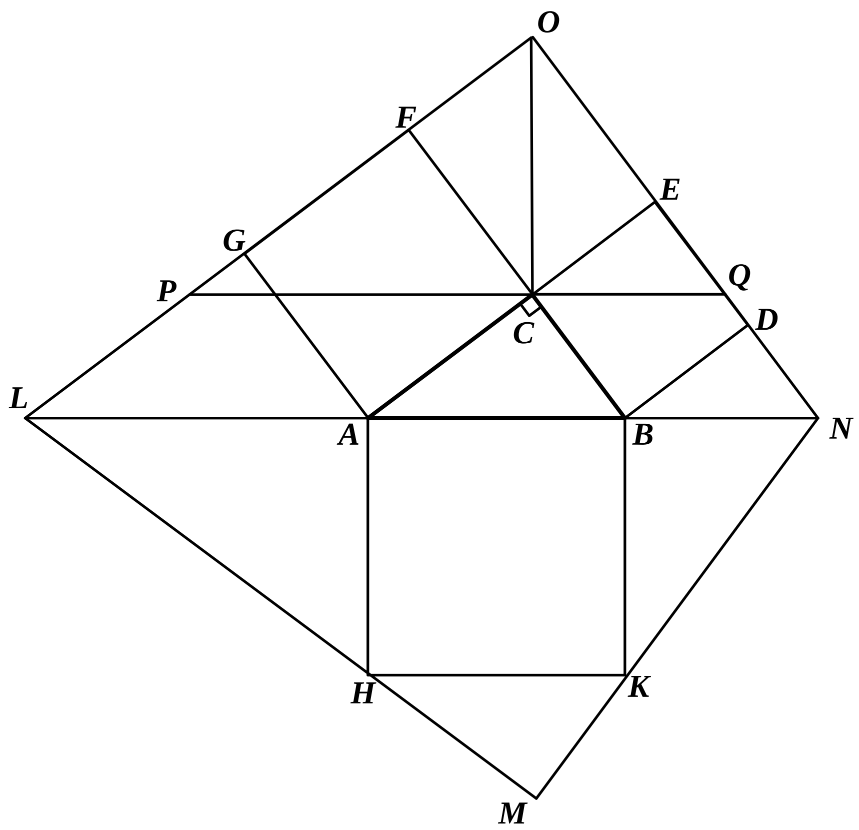
勾股定理證明-G066

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向外作一正方形 $CAGF$。
2. 延長 $\overline{ED}$ 交 $\overline{AB}$ 延長線於 N 點。
3. 延長 $\overline{FG}$ 交 $\overline{AB}$ 延長線於 L 點。
4. 延長 $\overline{DE}$ 交 $\overline{GF}$ 延長線於 O 點。
5. 連接 $\overline{NK}$ 與 $\overline{LH}$ 並延長交於 M 點。
6. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，與 $\overline{DE}$ 交於 Q 點，與 $\overline{GL}$ 交於 P 點。
7. 連接 $\overline{OC}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，利用輔助線將圖形延伸，並利用切割與推移等過程，重新找出面積的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形 EOC 、三角形 FCO 與三角形 CAB 全等：

   因為四邊形 $OFCE$ 為長方形，所以 $\overline{CE}=\overline{FO}=\overline{CB},\overline{CF}=\overline{EO}=\overline{CA}$ ，又

   $\angle CEO=\angle OFC=\angle BCA=90^{\circ}$，得到

$$\Delta EOC\cong\Delta FCO\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

2. 證明 $\angle OCQ=\angle OCP=90^{\circ}$：

   因為 $\overline{CQ}//\overline{BN}$， $\overline{QN}//\overline{BC}$ ，所以 $\angle CQO=\angle BND=\angle ABC$ ，又因 $\Delta EOC\cong\Delta CAB$ 可得到 $\angle EOC=\angle CAB$ ，所以

$$\angle OCQ=90^{\circ}\text{且}\angle OCP=90^{\circ}.$$

3. 證明三角形 KBN 與三角形 OCQ 全等，且三角形 HAL 與三角形 OCP 全等：

   因為 $BNQC$ 為平行四邊形，得 $\overline{BN}=\overline{CQ}$，且 $\angle NBK=\angle QCO=90^{\circ},\overline{BK}=\overline{BA}=\overline{CO}$ ，所以

$$\Delta KBN\cong\Delta OCQ\text{(SAS 全等)}.$$

   同理，因為 $\overline{AL}=\overline{CP},\angle LAH=\angle PCO=90^{\circ},\overline{AH}=\overline{AB}=\overline{CO}$ ，所以

$$\Delta HAL\cong\Delta OCP\text{(SAS 全等)}.$$

4. 證明三角形 MNL 與三角形 ONL 全等，且三角形 MKH 與三角形 CBA 全等：

   由 $\Delta KBN\cong\Delta OCQ$ 與 $\Delta HAL\cong\Delta OCP$ 的證明結果得到 $\angle BNK=\angle CQO=\angle BND$ ，且 $\angle ALH=\angle CPO=\angle ALP$ ，所以

$$\Delta MNL\cong\Delta ONL\text{(ASA 全等)}.$$

   因為 $\overline{HK}=\overline{AB},\angle MHK=\angle HLA=\angle PLA=\angle CAB$ ，同理可得到 $\angle MKH=\angle CBA$，所以

$$\Delta MKH\cong\Delta CBA\text{(ASA 全等)}.$$

5. 由同底等高關係，可得到

   平行四邊形 $CBNQ$ 面積＝正方形 $CBDE$ 面積,
   平行四邊形 $CALP$ 面積＝正方形 $CAGF$ 面積.

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$AHKB$面積＝ΔMNL面積－ΔMKH面積－ΔKBN面積－ΔHAL面積

＝ΔONL面積－ΔCBA面積－ΔOCQ面積－ΔOCP面積

＝平行四邊形$CBNQ$面積＋平行四邊形$CALP$面積

＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2 \ .$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 22). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明的輔助線將圖形延伸成為鳶形，利用等量消去的概念，上下分別得到兩個平行四邊形與一個正方形，利用推移過程，重新找出正方形的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	