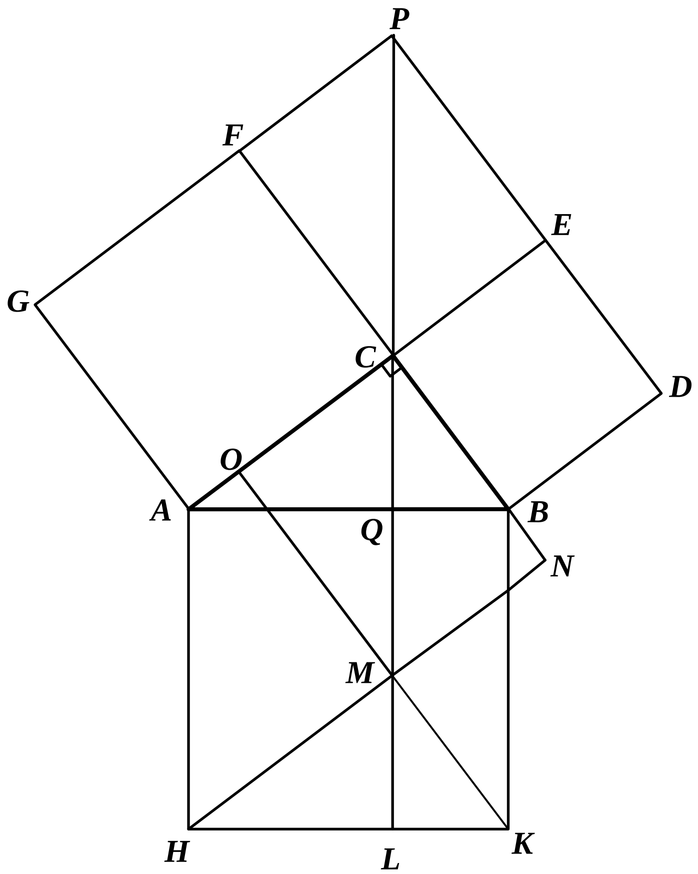
勾股定理證明-G050

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{GF}$與延長$\overline{DE}$交於P點，連接$\overline{PC}$。
3. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於L點，且交$\overline{AB}$於Q點。
4. 從H點作$\overline{AC}$的平行線與$\overline{CB}$延長線交於N點，且交$\overline{QL}$於M點。
5. 連接$\overline{KM}$，並延長$\overline{KM}$交$\overline{AC}$於O點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，將正方形$AHKB$區域切割為兩個長方形，再利用推移得到相同面積的兩個平行四邊形，經過全等形狀的增補與移除關係，分別得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形EPC與三角形FCP皆與三角形CAB全等：

由作圖條件得知四邊形$CEPF$為長方形，可得到$\Delta EPC \cong \Delta FCP$，又$\overline{CE}=\overline{BC}$，

$\overline{EP}=\overline{CF}=\overline{CA}, \angle CEP=\angle BCA=90^\circ$，所以$\Delta EPC \cong \Delta CAB$(SAS 全等)，因此

$$\Delta EPC \cong \Delta FCP \cong \Delta CAB.$$

2. 證明$P-C-L$共線：
因為$\Delta EPC \cong \Delta CAB$，所以$\angle PCE=\angle ABC$，得到
$\angle PCE+\angle ECB+\angle BCQ=(\angle ABC+\angle BCQ)+\angle ECB=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，所以

$$P-C-L \text{ 共線 }.$$

3. 先證明四邊形$CAHM$為平行四邊形，再證明三角形NCM與三角形FCP全等：
由作圖條件得知四邊形$CAHM$的對邊互相平行，所以四邊形$CAHM$為平行四邊形，得到$\overline{CM}=\overline{AH}$，又$\overline{AH}=\overline{AB}=\overline{CP}$，所以$\overline{CM}=\overline{CP}$，又$\angle CNM=\angle CFP=90^\circ$，且$\angle NCM=\angle FCP$(對頂角相等)，所以

$$\Delta NCM \cong \Delta FCP \text{(AAS 全等)}.$$

4. 證明$\overline{MK}$與$\overline{CB}$平行：

因為四邊形$CAHM$為平行四邊形，可得到$\overline{CM}=\overline{AH}=\overline{BK}$，又$\overline{CM}\,//\,\overline{BK}$，所以四邊形$BKMC$也是平行四邊形，因此

$$\overline{MK}\,//\,\overline{CB}.$$

5. 證明三角形OMC、三角形NCM、三角形EPC、三角形FCP皆與三角形CAB全等：
由作圖知$\overline{MO}$為$\overline{KM}$的延長線，所以$\overline{OM}\,//\,\overline{CN}$，得到四邊形$OMNC$為長方形，因此$\Delta OMC \cong \Delta NCM$，綜合結果得到

$$\Delta CAB \cong \Delta OMC \cong \Delta NCM \cong \Delta EPC \cong \Delta FCP.$$

6. 證明四邊形的全等：
由上述證明的結果，得到四邊形對應的邊角相等關係，可得

$$\text{四邊形}BCOK \cong \text{四邊形}CBDP,$$

且

$$\text{四邊形}CAHN \cong \text{四邊形}ACPG.$$

7. 找出長方形與正方形的面積關係：

$$\begin{aligned}\text{長方形}BKLQ\text{面積} &= \text{平行四邊形}BKMC\text{面積(同底等高)}\\ &= \text{四邊形}BCOK\text{面積}-\Delta OMC\text{面積}\\ &= \text{四邊形}CBDP\text{面積}-\Delta EPC\text{面積}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}.\end{aligned}$$

且

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}AHLQ\text{面積} &= \text{平行四邊形}ACMH\text{ 面積(同底等高)} \\
&= \text{四邊形}CAHN\text{ 面積} - \Delta NCM\text{ 面積} \\
&= \text{四邊形}ACPG\text{ 面積} - \Delta FCP\text{ 面積} \\
&= \text{正方形}CAFG\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

8. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}BKLQ\text{面積} + \text{長方形}AHLQ\text{面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{ 面積} + \text{正方形}CAGF\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(6/7), 168-170.
2. 心得：此題的特色在於利用兩個全等的梯形，共同減去全等的三角形後，得到相同面積的平行四邊形與梯形，最後推出畢氏定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		