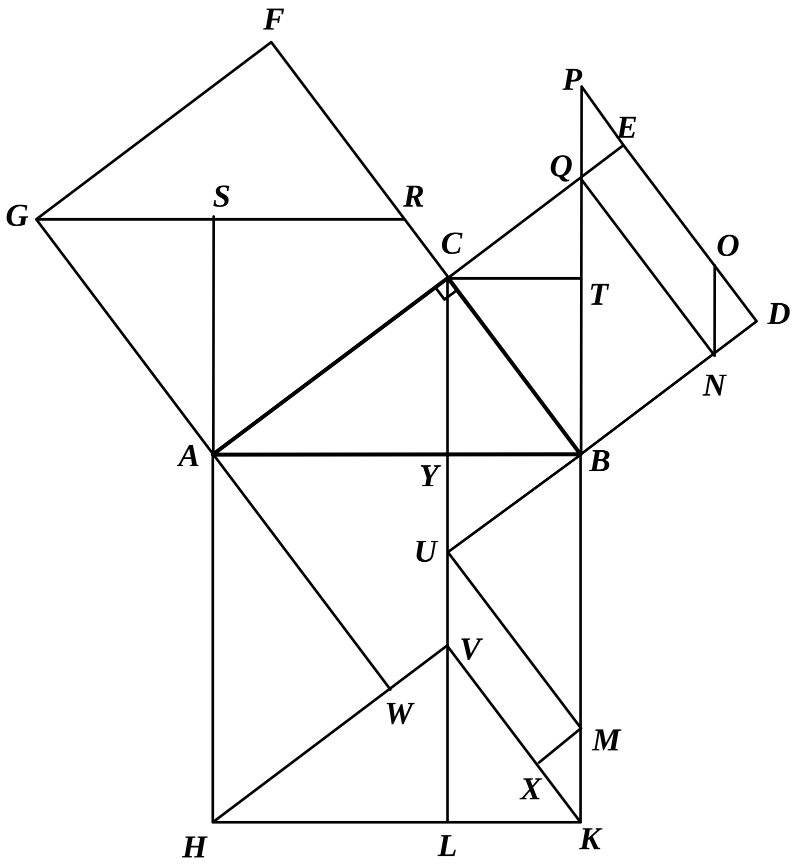
勾股定理證明-G049

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交$\overline{AB}$於Y點。
3. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{YL}$於V點，再連接$\overline{KV}$。
4. 延長$\overline{DB}$交$\overline{YL}$於U點，從U點作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{BK}$於M點。
5. 延長$\overline{KB}$交$\overline{CE}$於Q點，且與$\overline{DE}$延長線交於P點。
6. 從C點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{QB}$於T點，從M點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{VK}$於X點。
7. 從Q點作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{BD}$於N點，再從N作$\overline{BQ}$的平行線交$\overline{DE}$於O點。
8. 從G點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{CF}$於R點，延長$\overline{HA}$交$\overline{GR}$於S點，延長$\overline{GA}$交$\overline{HV}$於W點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，證明正方形$AHKB$的區域，經過圖形的切割，利用全等關係，可重新拼合出與正方形$CBDE$與正方形$CAGF$相等的區域，最後由面積相等推出畢氏定理的關係式。

1. 證明$\overline{VK}$與$\overline{CB}$平行：

   因為$\overline{CV} // \overline{AH}$，$\overline{HV} // \overline{AC}$，由四邊形對邊平行得到四邊形$AHVC$為平行四邊形，又

   因為$\overline{CV} = \overline{AH} = \overline{BK}$，且$\overline{CV} // \overline{BK}$，推得四邊形$BKVC$亦為平行四邊形，因此

$$\overline{VK} // \overline{CB}, \overline{VK} = \overline{CB}.$$

2. 證明三角形VLK與三角形BTC全等且三角形YUB與三角形TQC全等：

   因為$\overline{VK} = \overline{BC}$，由平行關係得到$\angle VKL = \angle BCT$且$\angle VLK = 90^\circ = \angle BTC$，所以

$$\Delta VLK \cong \Delta BTC \text{ (AAS 全等)}.$$

   同理，四邊形$UBQC$為平行四邊形，得到$\overline{UB} = \overline{CQ}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta YUB \cong \Delta TQC \text{ (AAS 全等)}.$$

3. 證明三角形BUM與三角形BNQ全等：
   由平行關係觀察平行四邊形$CBMU$、平行四邊形$CUBQ$與平行四邊形$CBNQ$，因為平行四邊形對角線切割的三角形全等，所以

$$\Delta BUM \cong \Delta UBC \cong \Delta QCB \cong \Delta BNQ.$$

4. 證明三角形PBD與三角形ABC全等，再證明四邊形$UVKM$與四邊形$PQNO$全等：

   因為$\overline{BD} = \overline{BC}$，$\angle PDB = \angle ACB = 90^\circ$，又$\angle PBD = 90^\circ - \angle CBQ = \angle ABC$，所以

$$\Delta PBD \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

   得到$\overline{KB} = \overline{AB} = \overline{BP}$，又由作圖條件知四邊形$UVKM$與四邊形$PQNO$皆為平行四邊形，且由平行關係得到對應角均相同，又因為

   $\overline{UM} = \overline{QN}, \overline{MK} = \overline{KB} - \overline{BM} = \overline{BP} - \overline{CU} = \overline{BP} - \overline{BQ} = \overline{PQ}$，得到

$$\text{平行四邊形}UVKM \cong \text{平行四邊形}PQNO$$

5. 證明三角形MXK、三角形QEP、三角形NDO全等，四邊形$UVXM$與四邊形$NOEQ$全等：

   因為$\overline{MK} = \overline{PQ} = \overline{ON}$，且由平行關係得到

   $\angle MKX = \angle QPE = \angle NOD, \angle MXK = \angle PEQ = \angle ODN = 90^\circ$，所以

$$\Delta MXK \cong \Delta QEP \cong \Delta NDO\text{(AAS 全等)}.$$

又因平行四邊形$UVKM \cong$平行四邊形$PQNO$，將平行四邊形$UVKM$旋轉180°可得

$$\text{四邊形}UVXM \cong \text{四邊形}NOEQ\ .$$

6. 證明三角形WAH與三角形FGR全等：

因為$\overline{GF} = \overline{AC}$，由平行關係得到對應角相等，所以$\Delta FGR \cong \Delta CAB$(AAS 全等)，

又$\overline{AB} = \overline{AH}$，$\angle CAB = 90^{\circ} - \angle BAW = \angle WAH$, $\angle ACB = \angle AWH = 90^{\circ}$，所以

$\Delta CAB \cong \Delta WAH$ (AAS 全等)，因此

$$\Delta WAH \cong \Delta FGR.$$

7. 證明三角形HLV與三角形ASG全等：

同理，$\overline{AG} = \overline{AC}$, $\angle CAY = 90^{\circ} - \angle CAS = \angle GAS$, $\angle CYA = \angle GSA = 90^{\circ}$，所以

$\Delta GAS \cong \Delta CAY$(AAS 全等)，又$\overline{AY} = \overline{HL}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$\Delta CAY \cong \Delta VHL$(AAS 全等)，因此

$$\Delta HLV \cong \Delta ASG.$$

8. 證明四邊形$AWVY$與四邊形$ACRS$全等：

因為$\overline{AY} = \overline{AS}$, $\overline{AW} = \overline{AC}$，再由平行關係得到對應角相等，因此

$$\text{四邊形}AWVY \cong \text{四邊形}ACRS.$$

9. 推導出長方形與正方形相等面積的關係：

$$\begin{aligned}\text{長方形}BKLY\text{面積} &= \Delta VLK\text{面積} + \Delta BUM\text{面積} + \text{四邊形}UVXM\text{面積}\\ &\quad + \Delta MXK\text{面積} + \Delta YUB\text{面積}\\ &= \Delta BTC\text{面積} + \Delta BNQ\text{面積} + \text{四邊形}NOEQ\text{面積}\\ &\quad + \Delta NDO\text{面積} + \Delta TQC\text{面積}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\text{長方形}AHLY\text{面積} &= \Delta WAH\text{面積} + \Delta HLV\text{面積} + \text{四邊形}AWVY\text{面積}\\ &= \Delta FGR\text{面積} + \Delta ASG\text{面積} + \text{四邊形}ACRS\text{面積}\\ &= \text{正方形}CAGF\text{面積}.\end{aligned}$$

10. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}BKLY\text{面積} + \text{長方形}AHLY\text{面積}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}CAGF\text{面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(6/7), 168-170.

2. 心得：此證明切割的元件雖多，但作輔助線的過程皆與平行有關，學生較容易看出對應角的相等關係，再加上平行四邊形的對邊等長關係，更能順利判斷三角形之間的全等性質。最後利用平移與旋轉的拼圖技巧，得到了三個正方形面積之間的畢氏定理關係。(此題圖形的分割元件與 G021 有六塊相同)。
   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 說明：此證明的分割方式在 Loomis 的書中多畫了 $\overline{AR}$ 與 $\overline{AV}$ 的線綴，但書中實際的證明過程完全沒有用到，因此這個證明我們就直接省略這兩線段了。