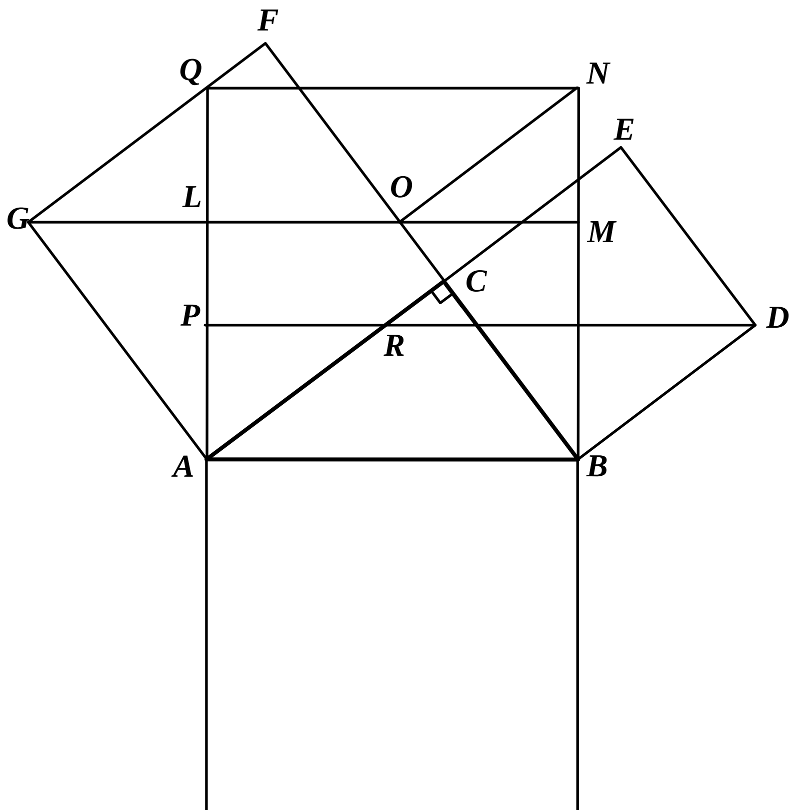
勾股定理證明-G048

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{HA}$，交$\overline{GF}$於Q點。
3. 從Q點作$\overline{AB}$的平行線並延長$\overline{KB}$交於N點，得到四邊形$ABNQ$(於證明過程第 1 點說明四邊形$ABNQ$為正方形)。
4. 從G點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AQ}$於L點，交$\overline{CF}$於O點，交$\overline{BN}$於M點。
5. 從D點作$\overline{AB}$的平行線與$\overline{CA}$交於R點，且與$\overline{AQ}$交於P點。
6. 連接$\overline{ON}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，透過與正方形$AHKB$等面積的

正方形 $ABNQ$ 區域切割，得到兩個長方形，再由推移與平移的關係得到兩個平行四邊形，再利用平行四邊形與正方形同底等高的關係，分別得到正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAQ 與三角形 CAB 全等，再證出四邊形 $ABNQ$ 為正方形且和正方形 $AHKB$ 全等：

   因為 $\overline{AG}=\overline{AC}, \angle QGA=\angle BCA=90^{\circ}, \angle GAQ=90^{\circ}-\angle QAC=\angle CAB$，所以

   $$\Delta GAQ \cong \Delta CAB \,(\text{ASA 全等}).$$

   由證明 $\Delta GAQ \cong \Delta CAB$ 得知 $\overline{AQ}=\overline{AB}$，再由作圖的平行條件知，四邊形 $ABNQ$ 四頂角皆為直角，所以

   四邊形 $ABNQ$ 為正方形，且正方形 $ABNQ \cong$ 正方形 $AHKB$.

2. 證明 $\overline{ON}$ 與 $\overline{QG}$ 平行，得到四邊形 $QGON$ 為平行四邊形：

   因為 $\overline{GO}//\overline{AB}$，$\overline{GA}//\overline{OB}$，所以四邊形 $GABO$ 為平行四邊形，又 $\overline{GO}//\overline{QN}$ 且因為四邊形 $ABNQ$ 為正方形，所以 $\overline{GO}=\overline{AB}=\overline{QN}$，所以四邊形 $QGON$ 亦為平行四邊形。

3. 證明平行四邊形 $QGON$ 與平行四邊形 $RABD$ 全等：

   由作圖的平行條件知，四邊形 $RABD$ 為平行四邊形，又因為 $\overline{ON}=\overline{GQ}=\overline{CB}=\overline{BD}$，$\overline{QN}=\overline{AB}$，且由平行關係得到對應角相等，可知

   $$\text{平行四邊形}QGON \cong \text{平行四邊形}RABD.$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

   因為

   $$\begin{aligned}
   \text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{正方形}QABN\text{面積}\\
   &= \text{長方形}QLMN\text{面積}+\text{長方形}LABM\text{面積}\\
   &= \text{平行四邊形}QGON\text{面積}+\text{平行四邊形}GABO\text{面積}\\
   &= \text{平行四邊形}RABD\text{面積}+\text{平行四邊形}GABO\text{面積}\\
   &= \text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積}\,.
   \end{aligned}$$

   得到

   $$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, 4(6/7), 168-170.

   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.158). New York : Macmillan and co.

2. 心得：此證明透過正方形切割後所得的長方形，由推移與平移的關係得到平行四邊形，再由同底等高的面積計算關係，證明畢氏定理的關係式。此題可以將作圖簡化，直接以正方形 *ABNQ* 取代正方形 *ABKH* 。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		