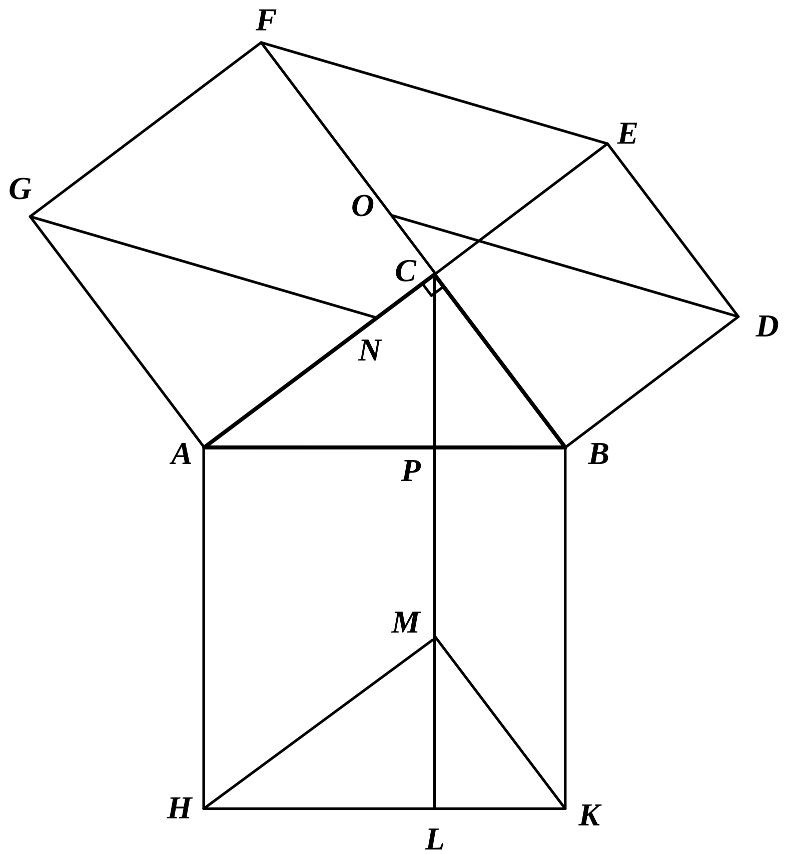
勾股定理證明-G047

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於L點。
3. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{CL}$於M點，並連接$\overline{MK}$。
4. 連接$\overline{FE}$。
5. 在$\overline{AC}$上取一點N，使得$\overline{AN}=\overline{BC}$，並連接$\overline{GN}$。
6. 在$\overline{BF}$上取一點O，使得$\overline{OB}=\overline{AC}$，並連接$\overline{OD}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，將正方形$AHKB$區域切割為兩

個長方形，利用推移的關係，得到相同面積的平行四邊形，經由全等的區域轉換與平行四邊形與正方形同底等高的關係，分別得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形ANG與三角形CEF全等：

   因為$\overline{AN}=\overline{CB}=\overline{CE}, \angle GAN=\angle ACB=\angle FCE=90^\circ, \overline{AG}=\overline{CA}=\overline{CF}$，所以

   $$\Delta ANG \cong \Delta CBA \cong \Delta CEF \text{ (SAS 全等).}$$

2. 證明四邊形$FENG$、四邊形$AHMC$與四邊形$BKMC$為平行四邊形：

   因為$\Delta ANG \cong \Delta CEF$得到$\angle GNA=\angle FEC$，由同位角相等的關係，得到$\overline{GN}\,//\,\overline{FE}$，

   又$\overline{GF}\,//\,\overline{NE}$，得到四邊形$FENG$為平行四邊形。由作圖條件可得知四邊形$AHMC$亦

   為平行四邊形，又因為$\overline{BK}=\overline{AH}=\overline{CM}$且$\overline{BK}\,//\,\overline{CM}$，得到四邊形$BKMC$亦為平行

   四邊形。

3. 證明平行四邊形的全等關係：

   因為$\overline{FE}=\overline{AH}, \overline{FG}=\overline{AC}, \angle GFE=90^\circ+\angle EFC=90^\circ+\angle BAC=\angle CAH$，所以

   $$\text{平行四邊形}AHMC \cong \text{平行四邊形}FENG.$$

   同理可證明

   $$\text{平行四邊形}BKMC \cong \text{平行四邊形}EFOD.$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

   $$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}BKLP\text{面積}+\text{長方形}AHLP\text{面積}\\ &= \text{平行四邊形}BKMC\text{面積}+\text{平行四邊形}AHMC\text{面積}\\ &= \text{平行四邊形}EFOD\text{面積}+\text{平行四邊形}FENG\text{面積}\\ &= \overline{ED}\times\overline{EC}+\overline{FG}\times\overline{FC}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積.}\end{aligned}$$

   得到

   $$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(6/7), 168-170.

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.158). New York : Macmillan and co.

2. 心得：此證明先利用推移的概念將長方形面積視為平行四邊形面積，經由全等轉換位置後，再以與平行四邊形同底等高的關係，得到正方形的面積，最後推出畢氏定理的關係式。此題利用兩大區塊的平移與計算概念，並沒有複雜的拼合動作。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		