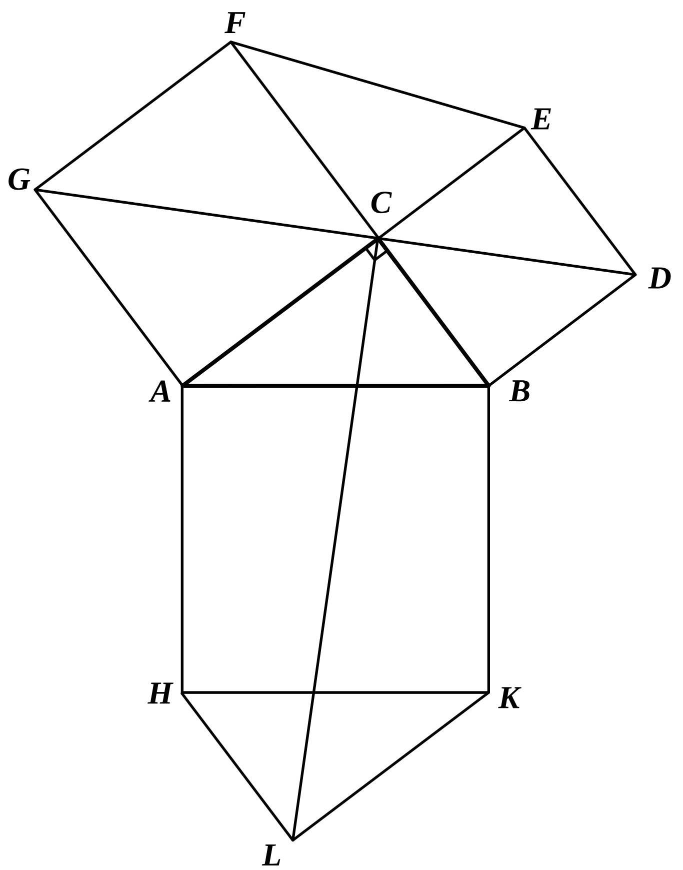
勾股定理證明-G046

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 在$\overline{HK}$邊上向外作三角形LKH與三角形CAB全等。
3. 連接$\overline{CG}$與$\overline{CD}$(於證明過程第 2 點說明$G-C-D$共線)。
4. 連接$\overline{CL}$與$\overline{FE}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，由增補兩個三角形LKH與三角形CFE，證明等面積的六邊形分別切割兩塊全等的三角形後，從所剩餘的區塊，可以得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積和相等於正方形$AHKB$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形CAB與三角形CFE全等：

因為$\overline{CA}=\overline{CF}$,$\overline{CB}=\overline{CE}$,$\angle ACB=\angle FCE=90^\circ$，所以

$$\Delta CAB\cong\Delta CFE\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 證明$G-C-D$共線：

   因為$\angle ACB=90^\circ,\angle ACG=\angle BCD=45^\circ$，所以$G-C-D$共線。

3. 由四邊形中三邊等長與兩角等角關係，得到四邊形$CAHL$、四邊形$LKBC$、四邊形$GABD$與四邊形$GFED$全等：

   因為$\overline{CA}=\overline{LK}=\overline{GA}=\overline{GF}=b$,$\overline{AH}=\overline{KB}=\overline{AB}=\overline{FE}=c$,$\overline{HL}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{ED}=a$，且

   $\angle CAH=\angle LKB=\angle GAB=\angle GFE$,$\angle AHL=\angle KBC=\angle ABD=\angle FED$，所以

$$\text{四邊形}CAHL\cong\text{四邊形}LKBC\cong\text{四邊形}GABD\cong\text{四邊形}GFED.$$

4. 利用面積增補與移除的關係，得到面積的等式：

   由上述全等關係得到

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB+\Delta CAB+\Delta LKH&=\text{六邊形}CAHLKB\\&=\text{四邊形}CAHL+\text{四邊形}LKBC\\&=\text{四邊形}GABD+\text{四邊形}GFED\\&=\text{六邊形}GABDEF\\&=\text{正方形}CBDE+\text{正方形}CAGF+\Delta CAB+\Delta CFE.\end{aligned}$$

5. 最後利用面積等量減法公理推出畢氏定理的關係式：

   將上述結果

$$\text{正方形}AHKB+\Delta CAB+\Delta LKH=\text{正方形}CBDE+\text{正方形}CAGF+\Delta CAB+\Delta CFE.$$

   同時減去兩個皆全等的三角形區域，得到

$$\text{正方形}AHKB\text{面積}=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積}$$

   所以

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：由文藝復興時期義大利藝術家達文西(Leonardo da Vinci，1452~1519)所證明。之後在以下的書籍中也找到證明：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 56). Amsterdam: A. Versluys.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 74). Paris: Vuibert et Nony.

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 32). Leipz.: Friese.
Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner,18.

2. 心得：此證明利用全等的位置轉換，再計算出面積相等。此題作圖方法很特別的利用對角線與角平分線，與大部份利用延長線與平行線的畫法不同。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●