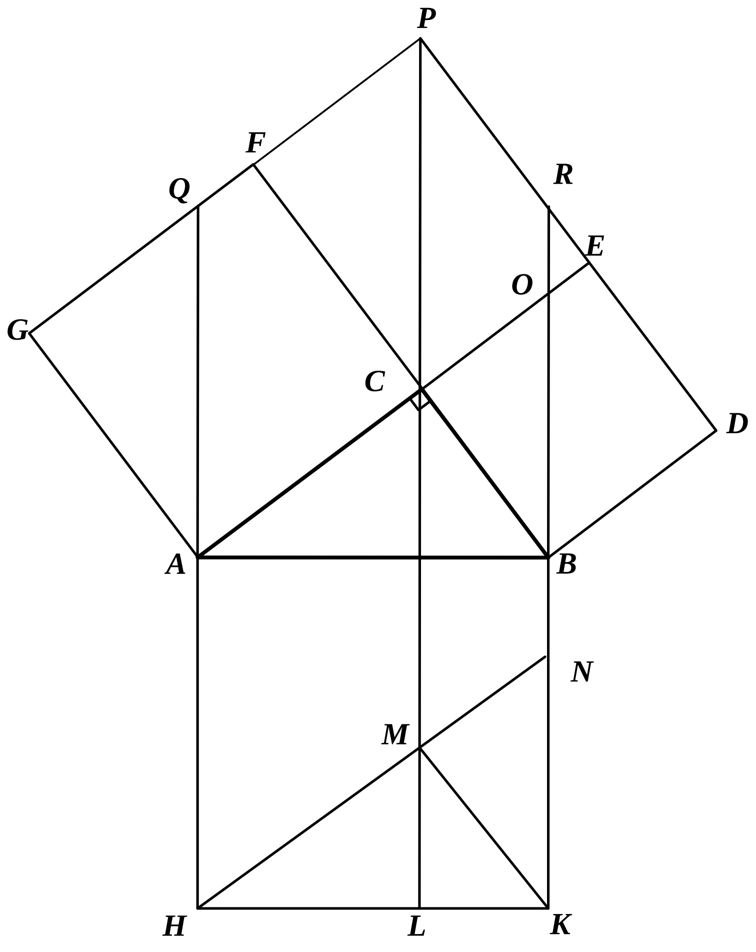
勾股定理證明-G045

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{GF}$並與$\overline{DE}$延長線交於P點，連接$\overline{PC}$。
3. 延長$\overline{HA}$與$\overline{GF}$交於Q點。
4. 延長$\overline{KB}$，交$\overline{PE}$於R點，且與$\overline{CE}$交於O點。
5. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於L點。
6. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{CL}$於M點，交$\overline{BK}$於N點
7. 連接$\overline{MK}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，證明正方形$AHKB$的區域，經過圖形的切割、拼合與平移等過程，重新拼合出與正方形$CBDE$與正方形$CAGF$相等的區域，最後由面積相等推出畢氏定理的關係式。

1. 證明四邊形$AHMC$與四邊形$CMKB$都是平行四邊形：

   由作圖的平行關係可知四邊形$AHMC$是平行四邊形，得到$\overline{CM}=\overline{AH}=\overline{BK}$，又因為$\overline{CM}\,//\,\overline{BK}$，所以四邊形$CMKB$也是平行四邊形，得到

$$\overline{MK}=\overline{CB}\text{且}\overline{MK}\,//\,\overline{CB}.$$

2. 證明三角形KNM與三角形BOC全等，且三角形MHK與三角形CAB全等：

   因為$\overline{MK}=\overline{CB}$，又由平行關係可知$\angle NMK=\angle OCB$且$\angle MNK=\angle COB$，所以

$$\Delta KNM\cong\Delta BOC\,(\text{AAS 全等}).$$

   又因為$\overline{MK}=\overline{CB}$、$\overline{MH}=\overline{CA}$與$\overline{HK}=\overline{AB}$，可證明

$$\Delta MHK\cong\Delta CAB\,(\text{SSS 全等}).$$

3. 證明三角形QGA與三角形BCA全等，得到$\overline{QG}=\overline{PF}$，$\overline{AQ}=\overline{AH}$：

   因為$\angle GAQ=90^\circ-\angle CAQ=\angle CAB, \overline{AG}=\overline{AC}, \angle AGQ=\angle ACB=90^\circ$，所以

$$\Delta QGA\cong\Delta BCA\,(\text{ASA 全等}),$$

   得到

$$\overline{QG}=\overline{CB}=\overline{CE}=\overline{PF},\quad \overline{AQ}=\overline{AB}=\overline{AH}$$

4. 證明三角形PFC與三角形QGA全等且三角形PCE與三角形RBD全等：

   因為$\overline{PF}=\overline{QG}$，又$\overline{FC}=\overline{GA}$且$\angle PFC=\angle QGA=90^\circ$，所以

$$\Delta PFC\cong\Delta QGA\,(\text{SAS 全等}).$$

   得到$\angle FPC=\angle GQA$，因此$\overline{PC}\,//\,\overline{QA}$(同位角相等)，進而得到$P-C-L$共線，且$\overline{PC}\,//\,\overline{QA}\,//\,\overline{RB}$，又$\overline{PR}\,//\,\overline{BC}$，所以四邊形$PRBC$為平行四邊形，得到$\overline{PC}=\overline{RB}$，又利用平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta PCE\cong\Delta RBD\,(\text{AAS 全等}).$$

5. 證明五邊形$AHNBC$與五邊形$QAORP$全等：

   利用平行關係可知四邊形$AHNO$、四邊形$QACP$均為平行四邊形，所以$\overline{HN}=\overline{AO}$，

$\overline{AC}=\overline{QP}$ 、又 $\overline{AH}=\overline{AQ}$ ，且由平行關係可得到對應角相等，所以

$$\text{五邊形}AHNBC\cong\text{五邊形}QAORP.$$

6. 證明四邊形 $PCOR$ 面積與四邊形 $OBDE$ 面積相等：

   因為 $\Delta PCE\cong\Delta RBD$ ，所以

$$\begin{aligned}\text{四邊形}PCOR\text{ 面積}&=\Delta PCE\text{ 面積}-\Delta ROE\text{ 面積}\\&=\Delta RBD\text{ 面積}-\Delta ROE\text{ 面積}\\&=\text{四邊形}OBDE\text{ 面積}.\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{ 面積}&=\Delta KNM\text{ 面積}+\Delta MHK\text{ 面積}+\text{四邊形}AHNB\text{面積}\\&=\Delta BOC\text{ 面積}+\Delta CAB\text{面積}+\text{四邊形}AHNB\text{面積}\\&=\Delta BOC\text{ 面積}+\text{五邊形}AHNBC\text{ 面積}\\&=\Delta BOC\text{ 面積}+\text{五邊形}QAORP\text{ 面積}\\&=\Delta BOC\text{ 面積}+(\text{四邊形}PCOR\text{面積}+\Delta PFC\text{ 面積}+\text{四邊形}ACFQ\text{ 面積})\\&=(\Delta BOC\text{ 面積}+\text{四邊形}OBDE\text{ 面積})+(\Delta QGA\text{面積}+\text{四邊形}ACFQ\text{ 面積})\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(6/7), 168-170.

2. 心得：此證明過程是透過拼圖的方式，先將正方形 $AHKB$ 內的區塊，利用形狀全等的區塊來重新拼合，以相等面積但形狀不同的區塊去拼出另兩股的正方形區域。此題完全不使用推移的想法與底高的面積計算概念，雖然輔助線圖形與 G040，G042 類似，但方法是不一樣的。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	