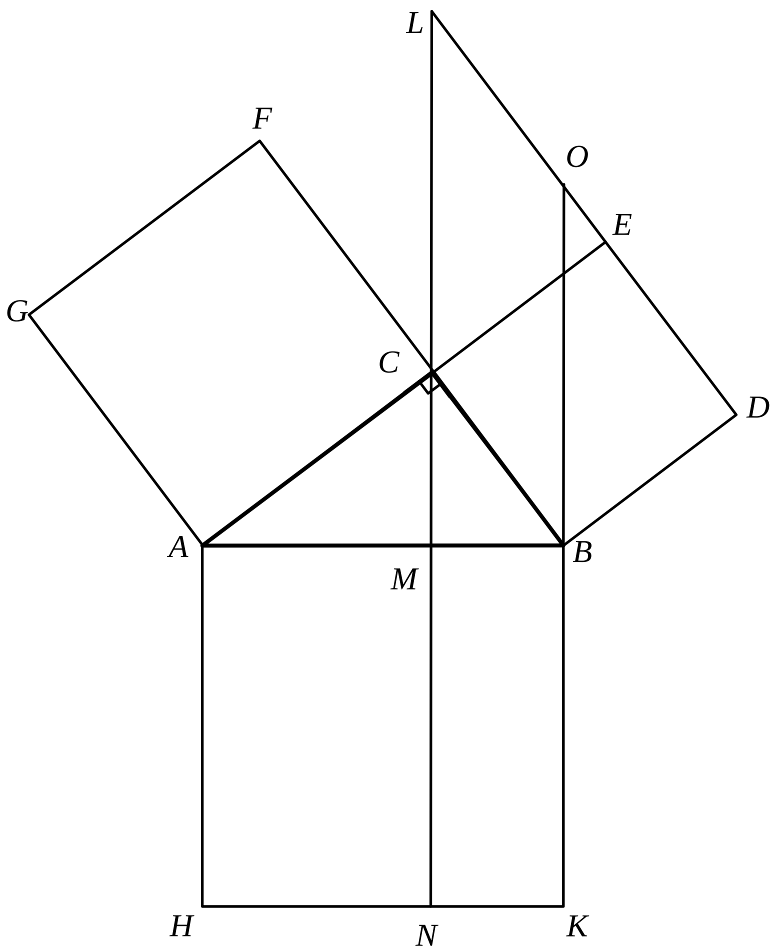
勾股定理證明-G044

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於N點，且交$\overline{AB}$於M點。
3. 延長$\overline{DE}$，使得$\overline{EL}=\overline{CA}$。
4. 延長$\overline{KB}$與$\overline{EL}$交於O點。
5. 連接$\overline{LC}$。



【求證過程】

此證明類似 G-042，以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，將正方形

$AHKB$所切割出的兩個長方形，透過推移的方式，先證明平行四邊形$BOLC$與正方形$CBDE$等底同高的關係，得到平行四邊形$BOLC$與正方形$CBDE$的面積相等，同理，得出正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形CAB與三角形ELC全等：

   因為$\overline{CA}=\overline{EL}, \angle BCA=\angle CEL=90^o, \overline{BC}=\overline{CE}$，所以

   $$\Delta CAB \cong \Delta ELC \text{ (SAS 全等).}$$

2. 證明三角形CAB與三角形DOB全等：

   因為$\angle BCA=\angle BDO=90^o, \overline{CB}=\overline{DB}, \angle ABC=90^\circ-\angle CBO=\angle OBD$，所以

   $$\Delta CAB \cong \Delta DOB \text{ (ASA 全等).}$$

3. 先證明$L-C-N$共線，再得到四邊形$BOLC$為平行四邊形：

   由證明結果$\Delta CAB \cong \Delta ELC \cong \Delta DOB$，得知$\angle ELC=\angle DOB$，再由同位角相等的關係，得到$\overline{LC} // \overline{OB}$，即

   $$L-C-N \text{ 共線.}$$

   且四邊形$BOLC$為平行四邊形。

4. 證明長方形$BKNM$與正方形$CBDE$面積相等，同理，長方形$AHNM$面積與正方形$CAGF$面積相等。：

   因為$L-C-N$共線，所以長方形$BKNM$與平行四邊形$BOLC$有相等的高，又由證明結果$\Delta CAB \cong \Delta DOB$得知，

   $$\begin{aligned}\text{長方形}BKNM\text{ 面積} &= \overline{BK}\times\overline{BM} \\ &= \overline{BO}\times\overline{BM}\text{ (等底同高)} \\ &= \text{平行四邊形}BOLC\text{面積} \\ &= \overline{BC}\times\overline{CE} \\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積(同底等高).}\end{aligned}$$

   同理，長方形$AHNM$面積 ＝ 正方形$CAGF$面積。

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

   $$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}BKNM\text{面積}+\text{長方形}AHNM\text{面積} \\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積.}\end{aligned}$$

   得到

   $$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 19). Amsterdam: A. Versluys.

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 72). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此證明繪製輔助線的方式與 G-042 的右半部區域畫法是相同的，證明過程是將正方形 $AHKB$ 切割出的兩個長方形，透過推移的方式，證明長方形 $BKNM$ 、平行四邊形 $BOLC$ 與正方形 $CBDE$ 之間因為等底等高的關係，而得到相等的面積，但是如何從長方形 $AHNM$ 得出正方形 $CAGF$ 的面積？過程中只是以同理的想法來敘述，並沒有證明也沒有相關輔助圖。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		