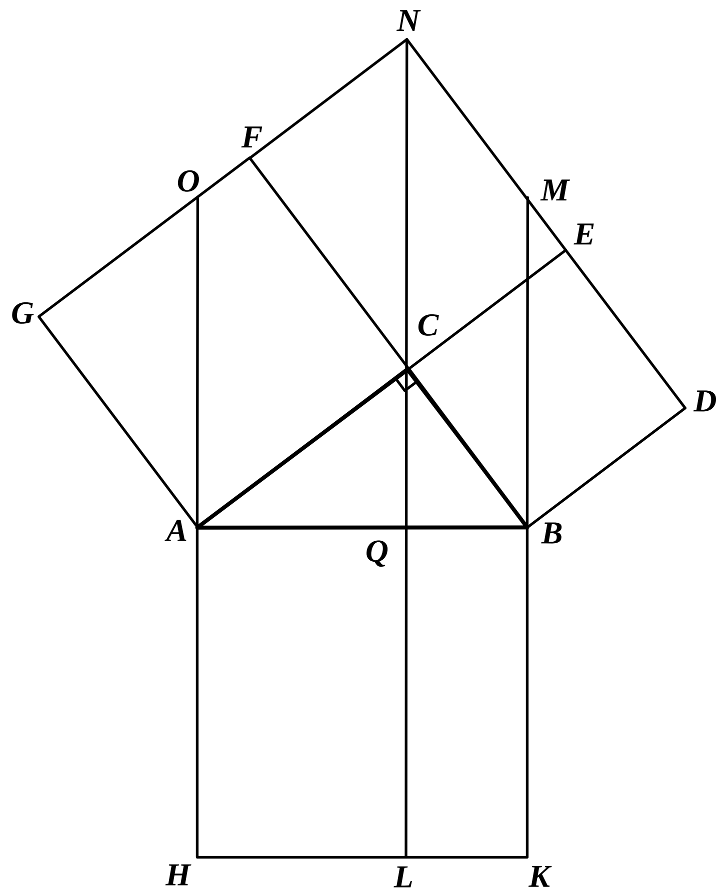
勾股定理證明-G042

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於L點，且交$\overline{AB}$於Q點。
3. 延長$\overline{GF}$與延長$\overline{DE}$交於N點。
4. 延長$\overline{HA}$，交$\overline{GF}$於O點。
5. 延長$\overline{KB}$，交$\overline{NE}$於M點。
6. 連接$\overline{NC}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，透過輔助線將正方形$AHKB$所

切割出的兩個長方形，透過推移的方式，分別得到兩個平行四邊形，再經過同底等高面積計算的轉換，分別得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形ABC與三角形AOG，三角形MBD全等：

   因為 $\angle CAB = 90^{\circ} - \angle CAO = \angle GAO, \overline{AC} = \overline{AG}, \angle ACB = 90^{\circ} = \angle AGO$，所以

   $$\Delta ABC \cong \Delta AOG \text{ (ASA 全等).}$$

   同理，$\angle CBA = 90^{\circ} - \angle CBM = \angle DBM, \overline{BC} = \overline{BD}, \angle ACB = 90^{\circ} = \angle MDB$, 所以

   $$\Delta ABC \cong \Delta MBD \text{ (ASA 全等).}$$

2. 先證明三角形NFC與三角形OGA全等，再證明$N-C-L$共線：
   已證明$\Delta ABC \cong \Delta AOG$，又由作圖條件知四邊形$CENF$為長方形, 所以

   $\overline{FN} = \overline{CE} = \overline{CB} = \overline{GO}$，且$\overline{FC} = \overline{GA}$，又$\angle NFC = \angle OGA = 90^{o}$，所以

   $$\Delta NFC \cong \Delta OGA \text{（}SAS\text{ 全等）.}$$

   由$\Delta NFC \cong \Delta OGA$得$\angle AOG = \angle CNF$，所以$\overline{AO} // \overline{CN}$（同位角相等），進一步得知

   $$N-C-L \text{ 共線.}$$

3. 由$N-C-L$共線的關係，得到平行四邊形$BCNM$與平行四邊形$ACNO$的面積轉換：

   已證明$\Delta ABC \cong \Delta AOG$與$\Delta ABC \cong \Delta MBD$，得到$\overline{AH} = \overline{AB} = \overline{AO}, \overline{BK} = \overline{BA} = \overline{BM}$，又

   因為$N-C-L$共線，所以四邊形$BCNM$與四邊形$ACNO$皆為平行四邊形，得到

   $$\begin{aligned}\text{長方形}BKLQ\text{ 面積} &= \overline{BK} \times \overline{BQ} \\ &= \overline{BM} \times \overline{BQ} \\ &= \text{平行四邊形}BCNM\text{ 面積} \\ &= \overline{BC} \times \overline{CE} \\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\text{長方形}AHLQ\text{ 面積} &= \overline{AH} \times \overline{AQ} \\ &= \overline{AO} \times \overline{AQ} \\ &= \text{平行四邊形}ACNO\text{ 面積} \\ &= \overline{AC} \times \overline{CF} \\ &= \text{正方形}CAGF\text{面積}\end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：
   因為

正方形$AHKB$面積＝長方形$BKLQ$面積＋長方形$AHLQ$面積

=平行四邊形$BCNM$面積＋平行四邊形$ACNO$面積

=正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 18). Amsterdam: A. Versluys.

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(6/7), 168-170.

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry***(**p.159**)**. New York : Macmillan
and co.

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 26). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明輔助線不多，繪圖過程中大多運用了延長線的作法，得到了許多線段間的平行關係，再利用角度互餘的關係得到等角，進而證明三角形的全等，找出對應區域的面積計算，此證明的過程是由代數的計算來表現推移的概念，得到長方形、平行四邊形與正方形的相同面積關係。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		