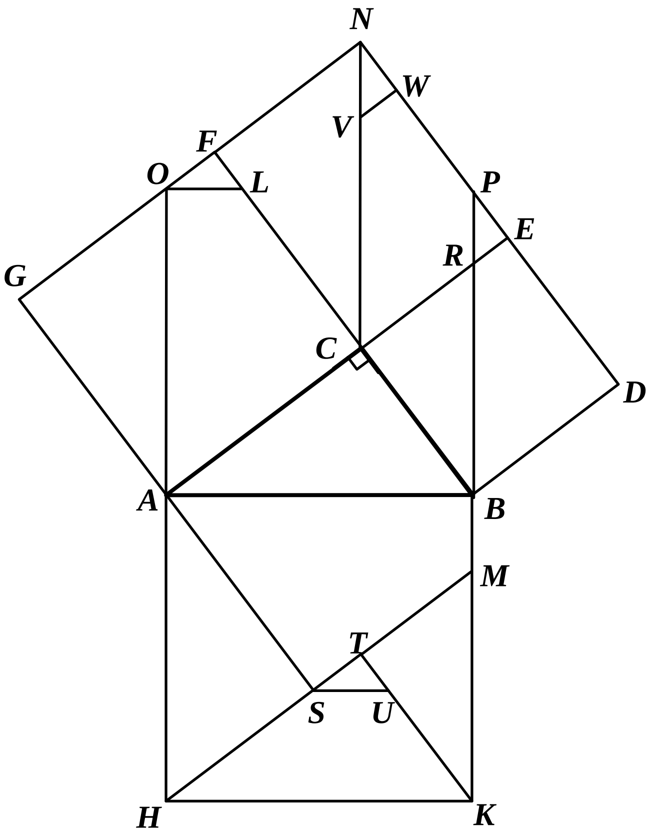
勾股定理證明-G041

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{DE}$與延長$\overline{GF}$交於N點。
3. 延長$\overline{KB}$交$\overline{CE}$於R點，且交$\overline{NE}$於P點。
4. 延長$\overline{HA}$交$\overline{GF}$於O點，並從O點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{CF}$於L點。
5. 連接$\overline{NC}$，在$\overline{NP}$上取一點W，使得$\overline{NW}=\overline{PE}$，再從$W$點作$\overline{EC}$的平行線交$\overline{CN}$於$V$點。
6. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BK}$於M點，再延長$\overline{GA}$與$\overline{HM}$交於S點。
7. 從K點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{HM}$於T點，再從S點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{TK}$於U點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，證明正方形$AHKB$的區域，經過圖形的切割、平移旋轉與拼合等過程，重新拼合出與正方形$CBDE$與正方形$CAGF$相等的區域，最後由面積相等推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形SAH與三角形GAO全等：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}, \angle SAH=90^{\circ}-\angle BAS=\angle CAB$，再由平行關係得到

$\angle ASH=\angle ACB=90^{\circ}$，所以

$$\Delta SAH\cong\Delta CAB\text{(AAS 全等)}.$$

因為$\overline{AG}=\overline{AC}, \angle GAO=90^{\circ}-\angle CAO=\angle CAB, \angle AGO=\angle ACB=90^{\circ}$，所以

$$\Delta GAO\cong\Delta CAB\text{(AAS 全等)}.$$

因此

$$\Delta SAH\cong\Delta GAO.$$

2. 證明四邊形$ASMB$與四邊形$ACLO$全等：

已證明$\Delta GAO\cong\Delta CAB\cong\Delta SAH$可得到$\overline{AB}=\overline{AO}, \overline{AS}=\overline{AC}$，由平行關係得到

$\angle ABM=\angle ASM=\angle AOL=\angle ACL=90^{\circ}$，又$\angle SAB=90^{\circ}-\angle CAB=\angle CAO$，所以

$$\text{四邊形}ASMB\cong\text{四邊形}ACLO.$$

(此證明四邊形全等的概念為：利用所知條件，可連接對角線並透過兩組三角形的全等證明，得到所有的對應邊及對應角均相等，進而證出兩四邊形全等，此證明方法在之前 G021 證明過程中已解釋過，因此之後類似概念，證明將不再註解。)

3. 先證明三角形THK與三角形CAB全等，再證得三角形MTK與三角形RCB全等：

因為$\overline{HK}=\overline{AB}$，由平行關係得到$\angle THK=\angle CAB$與$\angle TKH=\angle CBA$，所以

$\Delta THK\cong\Delta CAB$(ASA 全等)，進而得到$\overline{TK}=\overline{CB}$，再由平行關係得到$\angle KTM=\angle BCR$與$\angle TKM=\angle CBR$，所以

$$\Delta MTK\cong\Delta RCB\text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形SUT與三角形OLF全等：

因為$\overline{ST}=\overline{HT}-\overline{HS}=\overline{GF}-\overline{GO}=\overline{OF}$，由平行關係得到

$\angle TSU=\angle FOL, \angle STU=\angle OFL$，所以

$$\Delta SUT\cong\Delta OLF\text{ (ASA 全等)}.$$

5. 證明$\overline{NC}$平行$\overline{OA}$且四邊形$NCBP$為平行四邊形：

在三角形OGA與三角形NFC中，因為$\overline{GA}=\overline{FC},\angle OGA=\angle NFC=90^{\circ}$，且

$$\overline{GO}=\overline{CB}=\overline{CE}=\overline{FN},$$

所以

$$\Delta OGA\cong\Delta NFC\,(\text{SAS 全等}),$$

得到$\angle GOA=\angle FNC$同位角相等，因此

$$\overline{NC}\,//\,\overline{OA},$$

進而得到$\overline{NC}\,//\,\overline{OA}\,//\,\overline{PB}$，又因為$\overline{NP}\,//\,\overline{CB}$，所以

四邊形 $NCBP$ 為平行四邊形。

6. 先證明三角形NEC與三角形HTK全等，三角形PER與三角形STU全等，再證得四邊形$NCRP$和四邊形$HKUS$全等：

因為四邊形$NFCE$為長方形，得到$\overline{NE}=\overline{FC}=\overline{AC}=\overline{HT},\angle NEC=\angle HTK=90^{\circ},$

$\overline{EC}=\overline{TK}$，所以

$$\Delta NEC\cong\Delta HTK\ (\text{SAS 全等}).$$

又因四邊形$NCBP$為平行四邊形，得到$\overline{NP}=\overline{CB}$，所以

$\overline{PE}=\overline{NE}-\overline{NP}=\overline{CA}-\overline{CB}=\overline{HT}-\overline{HS}=\overline{ST}$，又$\angle PER=\angle HTK=90^{\circ}$，且由平行關係

得到$\angle EPR=\angle ENC=\angle THK=\angle TSU$，所以

$$\Delta PER\cong\Delta STU\ (\text{ASA 全等}).$$

因此由$\Delta NEC\cong\Delta HTK$，$\Delta PER\cong\Delta STU$，可得到

$$\text{四邊形}NCRP\cong\text{四邊形}HKUS.$$

7. 先證明三角形NWV與三角形PER全等，三角形NCE與三角形PBD全等，再得到四邊形$WVCE$與四邊形$ERBD$全等：

由條件知$\overline{NW}=\overline{PE}$，又由$\angle VNW=\angle RPE,\angle NWV=\angle PER$，所以

$$\Delta NWV\cong\Delta PER\,(\text{ASA 全等}).$$

又因為$\overline{CE}=\overline{BD}$且$\overline{CE}\,//\,\overline{BD}$，由$\overline{NC}\,//\,\overline{PB}$的平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta NCE\cong\Delta PBD\,(\text{ASA 全等}).$$

因此由$\Delta NWV\cong\Delta PER,\Delta NCE\cong\Delta PBD$，可得到

$$\text{四邊形}WVCE\cong\text{四邊形}ERBD.$$

8. 證明四邊形 $HKUS$ 面積與四邊形 $ERBD$ 面積相等：

由四邊形 $HKUS \cong$ 四邊形 $NCRP$、$\Delta NVW \cong \Delta PRE$ 與四邊形 $WVCE \cong$ 四邊形 $ERBD$ 的全等關係得到

$$\begin{aligned}\text{四邊形}HKUS\text{面積} &= \text{四邊形}NCRP\text{面積}\\ &= \Delta NVW\text{面積} + \text{五邊形}WVCRP\text{面積}\\ &= \Delta PRE\text{面積} + \text{五邊形}WVCRP\text{面積}\\ &= \text{四邊形}WVCE\text{面積}\\ &= \text{四邊形}ERBD\text{面積}.\end{aligned}$$

9. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積} &= (\text{四邊形}HKUS\text{面積} + \Delta MTK\text{面積}) + (\text{四邊形}ASMB\text{面積}\\ &\quad + \Delta SAH\text{面積} + \Delta SUT\text{面積})\\ &= (\text{四邊形}ERBD\text{面積} + \Delta RCB\text{面積}) + (\text{四邊形}ACLO\text{面積}\\ &\quad + \Delta GAO\text{面積} + \Delta OLF\text{面積})\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}CAGF\text{面積}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 12 月 12 日想到的。
2. 心得：此題的證明過程是由正方形 $AHKB$ 的區域，經過圖形的切割、平移旋轉與拼合等過程，重新再拼出正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的區域，但此題的輔助線稍多，其實可以再簡化，線段 $\overline{SU}$ 與 $\overline{PR}$ 可省略不作。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	