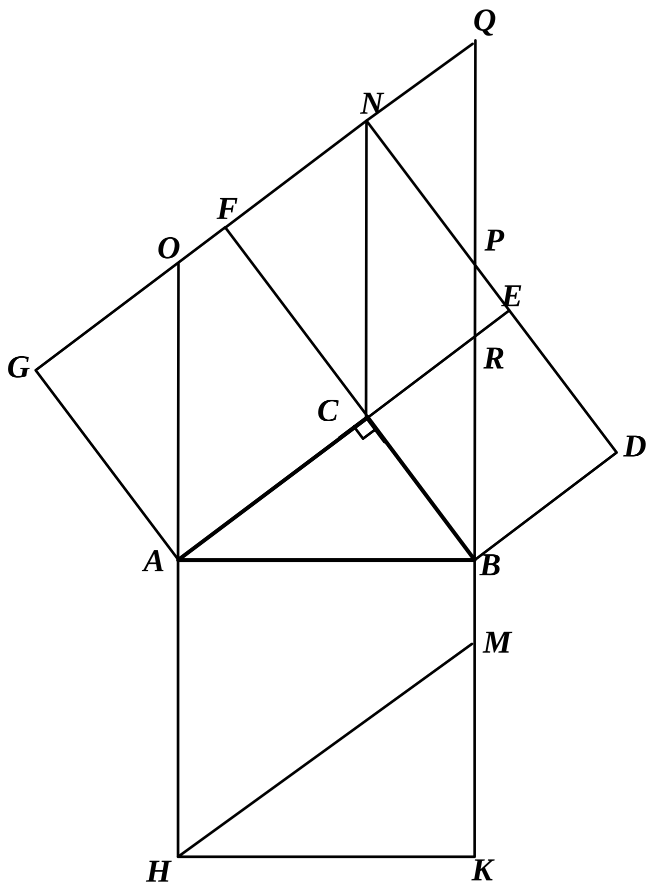
# 勾股定理證明-G040

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{GF}$與延長$\overline{DE}$交於$N$點。
3. 延長$\overline{HA}$交$\overline{GF}$於$O$點。
4. 延長$\overline{KB}$交$\overline{CE}$於$R$點，且交$\overline{NE}$於$P$點，並與$\overline{GF}$的延長線交於$Q$點。
5. 連接$\overline{NC}$。
6. 從$H$點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BK}$於$M$點。




【求證過程】

以直角三角形$ABC$的三邊分別向外作三個正方形，透過正方形$AHKB$區域的推

移，得到相同面積的平行四邊形，再經過分割並利用平行四邊形與正方形同底等高的關係，分別得到正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先透過證明三角形$GAO$與三角形$CAB$全等的結果，證明$\overline{OA}=\overline{AH}$ ：

   因為$\angle GAO=90^\circ-\angle CAO=\angle CAB, \overline{AG}=\overline{AC}, \angle AGO=\angle ACB=90^\circ$, 所以

   $$\Delta GAO\cong\Delta CAB\,(\text{ASA 全等}),$$

   得到

   $$\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{AH}.$$

2. 證明平行四邊形$AHMR$與平行四邊形$OARQ$全等：

   由作圖條件：$\overline{HM}\,//\,\overline{AR}\,//\,\overline{OQ}$且$\overline{OH}\,//\,\overline{QK}$ ，得到四邊形$AHMR$與四邊形$OARQ$皆為平行四邊形，又$\overline{OA}=\overline{AH}$ ，所以

   $$\text{平行四邊形}AHMR\cong\text{平行四邊形}OARQ.$$

3. 證明$\overline{NC}$平行$\overline{OA}$且四邊形$NOAC$、四邊形$NCRQ$、四邊形$NCBP$均為平行四邊形：

   在三角形$OGA$與三角形$NFC$中，因為$\overline{GA}=\overline{FC}, \angle OGA=\angle NFC=90^\circ$，且

   $$\overline{GO}=\overline{CB}=\overline{CE}=\overline{FN},$$

   所以

   $$\Delta OGA\cong\Delta NFC\,(\text{SAS 全等})$$

   得到$\angle GOA=\angle FNC$ ，因此$\overline{NC}\,//\,\overline{OA}$(同位角相等)，進而得到$\overline{NC}\,//\,\overline{OA}\,//\,\overline{BQ}$ .

   又因為$\overline{GQ}\,//\,\overline{AE}, \overline{ND}\,//\,\overline{FB}$ ，所以

   四邊形$NOAC$、四邊形$NCRQ$、四邊形$NCBP$均為平行四邊形。

4. 由圖形觀察底長與高的關係，得到面積關係式：

   正方形$AHKB$面積＝$\overline{AH}\times\overline{HK}$＝平行四邊形$AHMR$面積,
   平行四邊形$NCRQ$面積＝平行四邊形$NCBP$面積＝$\overline{CB}\times\overline{CE}$＝正方形$CBDE$面積,
   平行四邊形$NOAC$面積＝$\overline{CA}\times\overline{CF}$＝正方形$CAGF$面積

5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$AHKB$面積＝$\overline{AH}\times\overline{HK}$

＝平行四邊形$AHMR$面積

＝平行四邊形$OARQ$面積

＝平行四邊形$NCRQ$面積＋平行四邊形$OACN$面積

＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積,

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 72). Paris: Vuibert et Nony.

2. 心得：此題證明主要是利用推移得到相同面積的概念，透過的方式有推移、平移與分割，並利用平行四邊形與正方形同底等高的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | ● | ● | ● |

4. 說明：此題的輔助圖雖然看似區域較大，但如果透過動畫方式說明變換的過程，學生一定很容易了解。