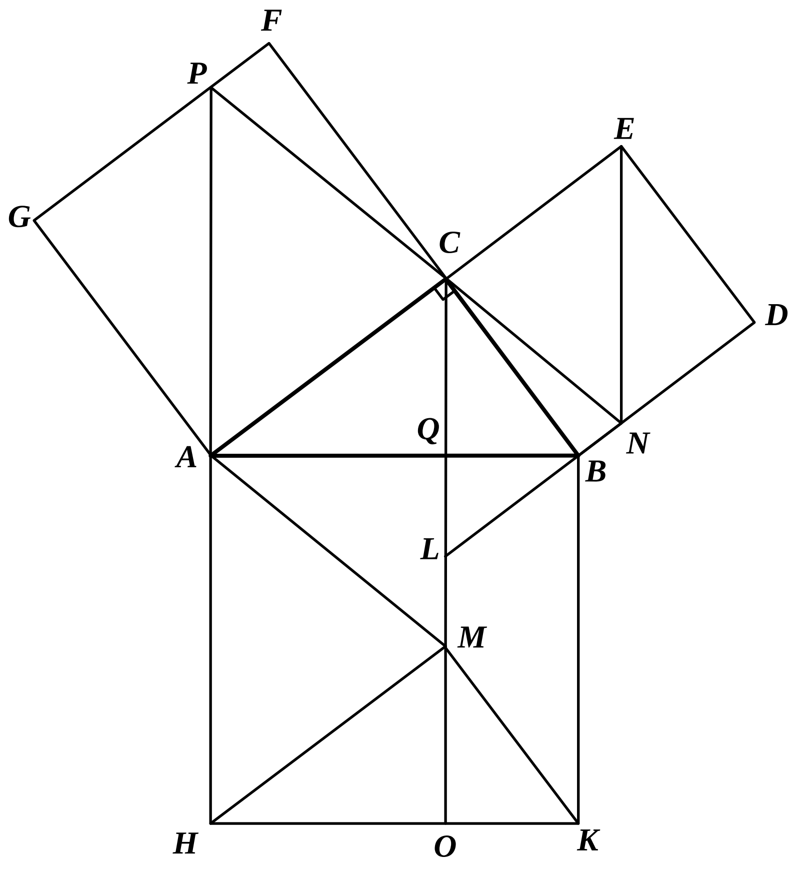
勾股定理證明-G039

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於O點，與$\overline{AB}$交於Q點。
3. 延長$\overline{HA}$與$\overline{GF}$交於P點，連接$\overline{CP}$。
4. 從E點作$\overline{CO}$的平行線交$\overline{BD}$於N點，連接$\overline{CN}$。
5. 從H點作$\overline{AC}$的平行線與$\overline{CO}$交於M點，連接$\overline{MK}$。
6. 延長$\overline{DB}$與$\overline{CO}$交於L點。
7. 連接$\overline{AM}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，透過正方形 $AHKB$ 區域切割的兩個矩形的推移，得到相同面積的平行四邊形，再經過面積計算的結果，分別得到正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先透過三角形 GAP 與三角形 CAB 全等的證明結果，證明 $\overline{PA}=\overline{AH}$ ：

   因為 $\angle GAP = 90^{\circ} - \angle CAP = \angle CAB, \overline{AG} = \overline{AC}, \angle AGP = \angle ACB = 90^{\circ}$，所以
   $$\Delta GAP \cong \Delta CAB (\text{ASA 全等}),$$
   得到
   $$\overline{PA}=\overline{AB}=\overline{AH}.$$

2. 先證明四邊形 $PAMC$ 為平行四邊形：

   因為四邊形 $AHMC$ 中，$\overline{AH}$ 平行 $\overline{CM}$ 且 $\overline{HM}$ 平行 $\overline{AC}$，所以四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形，又四邊形 $PAMC$ 中，
   $$\overline{PA} // \overline{CM} \text{ 且 } \overline{PA}=\overline{AH}=\overline{CM}$$
   所以由四邊形對邊平行且等長的條件可知， $PAMC$ 為平行四邊形。

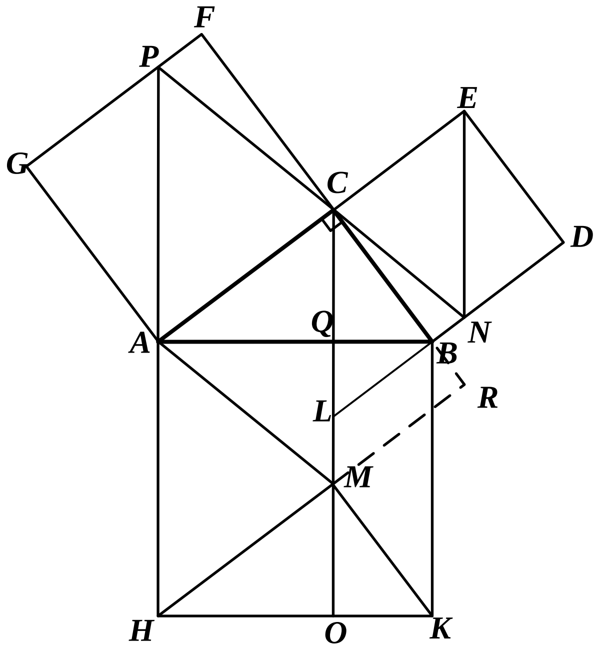
3. 證明長方形 $AHOQ$ 面積等於正方形 $CAGF$ ：
   $$\begin{aligned}
   \text{長方形}AHOQ\text{面積} &= \text{平行四邊形}AHMC \\
   &= \text{平行四邊形}PAMC\,(\text{等底同高}) \\
   &= 2\times\Delta PAC\text{面積} \\
   &= 2\times\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{CF}\right) \\
   &= \overline{AC}\times\overline{CF} \\
   &= \text{正方形}CAGF\text{面積}.
   \end{aligned}$$

4. 證明長方形 $BKOQ$ 面積等於正方形 $CBDE$ 面積：

   因原圖無法由原作者所說明的方式證明長方形 $BKOQ$ 面積等於正方形 $CBDE$ 面積，所以我們將 $\overline{HM}$ 延長與 $\overline{CB}$ 延長交於 R 點，因為 $\overline{CM}=\overline{AB}$，由平行關係得到

   $\angle CRM = \angle ACB = 90^{\circ}, \angle RCM = 90^{\circ} - \angle CBA = \angle CAB$ ，所以
   $$\Delta RCM \cong \Delta CAB (\text{AAS 全等}),$$
   得到 $\overline{BC}=\overline{MR}$ ，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}BKOQ\text{面積}&=\text{平行四邊形}BKMC\\&=\overline{BC}\times\overline{MR}\\&=\overline{BC}\times\overline{BC}\\&=\text{正方形}CAGF\text{面積}.\end{aligned}$$



5. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積}&=\text{長方形}BKOQ\text{面積}+\text{長方形}AHOQ\text{面積}\\&=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積},\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 11 月 16 日想到的。
2. 心得： 此證明左半部的圖形簡單明瞭，透過輔助線將長方形面積轉移為平行四邊形面積，再利用三角形面積的計算，進而推得相對應的正方形面積。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學

●			●	

4. 說明： 在魯米斯書中所繪的線段$\overline{EN}$、$\overline{CN}$，在證明中很難說明其面積的表示結構的由來，因此在此證明中延長線段$\overline{MR}$與$\overline{BR}$，藉此簡化計算過程。