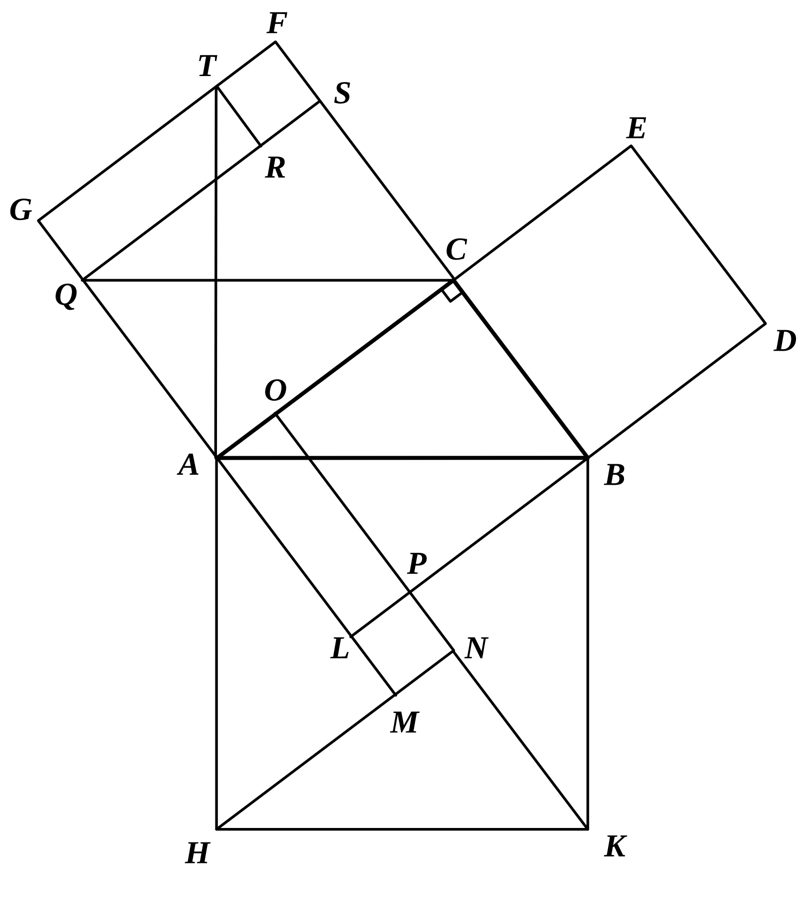
勾股定理證明-G038

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從K點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{AC}$於O點，從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{KO}$於N點。
3. 從A點作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{HN}$於M點。
4. 從B點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{AM}$於L點，且交$\overline{ON}$於P點。
5. 從C點作$\overline{BA}$的平行線交$\overline{AG}$於Q點，從Q點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{CF}$於S點。
6. 將$\overline{HA}$延長交$\overline{GF}$於T點。
7. 從T點作$\overline{FS}$的平行線交$\overline{QS}$於R點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先將正方形 $AHKB$ 的面積視為分割成四個三角形與一個正方形的面積區域，再透過全等區塊的轉換，將某一塊三角形表示為較小的三角形與四邊形，最後拼合成正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的面積和，推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形 CAB 與三角形 HNK 全等：

   因為 $\overline{AB}=\overline{HK}$ 且 $\overline{AB}\,//\,\overline{HK}$，又由 $\overline{NK}\,//\,\overline{CB}$ 與 $\overline{HN}\,//\,\overline{AC}$ 的平行關係，得到對應角 $\angle CBA=\angle NKH$ 與 $\angle CAB=\angle NHK$，所以

   $$\Delta CAB\cong\Delta HNK\ (\text{ASA 全等}).$$

2. 證明三角形 CAB 與三角形 MAH、三角形 LBA、三角形 PKB 皆全等：

   同理，因為 $\overline{AB}=\overline{AH}=\overline{KB}$，由平行關係得到對應角相等，所以

   $$\Delta CAB\cong\Delta MAH\cong\Delta LBA\cong\Delta PKB\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 證明三角形 CAB 與三角形 ACQ、三角形 SQC 皆全等：

   因為 $\overline{CQ}\,//\,\overline{BA}$，得到 $\angle CAB=\angle ACQ$，又 $\angle ACB=\angle CAQ=90^\circ$, $\overline{AC}=\overline{AC}$，所以

   $$\Delta CAB\cong\Delta ACQ\ (\text{ASA 全等}).$$

   同理，因為 $\overline{QS}\,//\,\overline{AC}$，四邊形 $SQAC$ 為長方形，所以 $\Delta SQC\cong\Delta ACQ.$

   因此

   $$\Delta CAB\cong\Delta ACQ\cong\Delta SQC.$$

4. 證明四邊形 $PLMN$ 與四邊形 $FTRS$ 為全等的正方形：

   因為 $\Delta CAB\cong\Delta MAH\cong\Delta LBA\cong\Delta PKB\cong\Delta LBA$，所以四邊形 $PLMN$ 四角為直角且邊長為 $\overline{CA}-\overline{CB}$ 的正方形。又因為

   $\angle GAT=\angle MAH$, $\angle AGT=\angle AMH=90^\circ$, $\overline{AG}=\overline{AM}$，所以 $\Delta GAT\cong\Delta MAH$ (ASA 全等)，得到 $\overline{GT}=\overline{MH}=\overline{CB}$，所以四邊形 $FTRS$ 也是四角為直角且邊長為 $\overline{CA}-\overline{CB}$ 的正方形，即

   $$\text{四邊形}FTRS\cong\text{四邊形}PLMN.$$

5. 證明四邊形 $ALPO$ 與四邊形 $TGQR$ 為全等的長方形：

   由證明結果知 $\overline{GT}=\overline{AL}=\overline{CB}$ 且 $\overline{TR}=\overline{LP}=\overline{CA}-\overline{CB}$，得到四邊形 $ALPO$ 與四邊形 $TGQR$ 為對應邊等長且四角為直角的長方形，即

   $$\text{長方形}TGQR\cong\text{長方形}ALPO.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

討論區塊的轉換

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{區域} &= \Delta NHK + \Delta PKB + \Delta LBA + \Delta MAH + \text{正方形}PLMN \\
&= 4\Delta CAB + \text{正方形}PLMN \\
&= (\Delta CAB + \Delta LBA + \Delta ACQ + \Delta SQC) + \text{正方形}FTRS \\
&= (\text{正方形}COPB + \text{長方形}ALPO) + \text{四邊形}SQAC + \text{正方形}FTRS \\
&= \text{正方形}CBDE + (\text{四邊形}TGQR + \text{四邊形}SQAC + \text{四邊形}FTRS) \\
&= \text{正方形}CBDE + \text{正方形}CAGF.
\end{aligned}
$$

得到

$$\text{正方形}AHBK\text{ 面積} = \text{正方形}CBDE\text{ 面積} + \text{正方形}CAGF\text{ 面積},$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明過程記載於
   Heath’s Mathematical Monographs, 1900, No. 2, p. 33, proof XXI.
2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 ABC 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，再利用正方形邊長等長的關係，得到對應的全等的區塊。此證明有特色之處在於透過全等的形狀，將某一塊三角形面積轉換成較小的三角形與四邊形的組合，這過程有近於代數「 $x = y + z$ 」的概念。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 說明：此證明的輔助圖其實可更簡化，將以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作的正方形 $CBPO$ 取代以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作一正方形 $CBDE$ 即可。