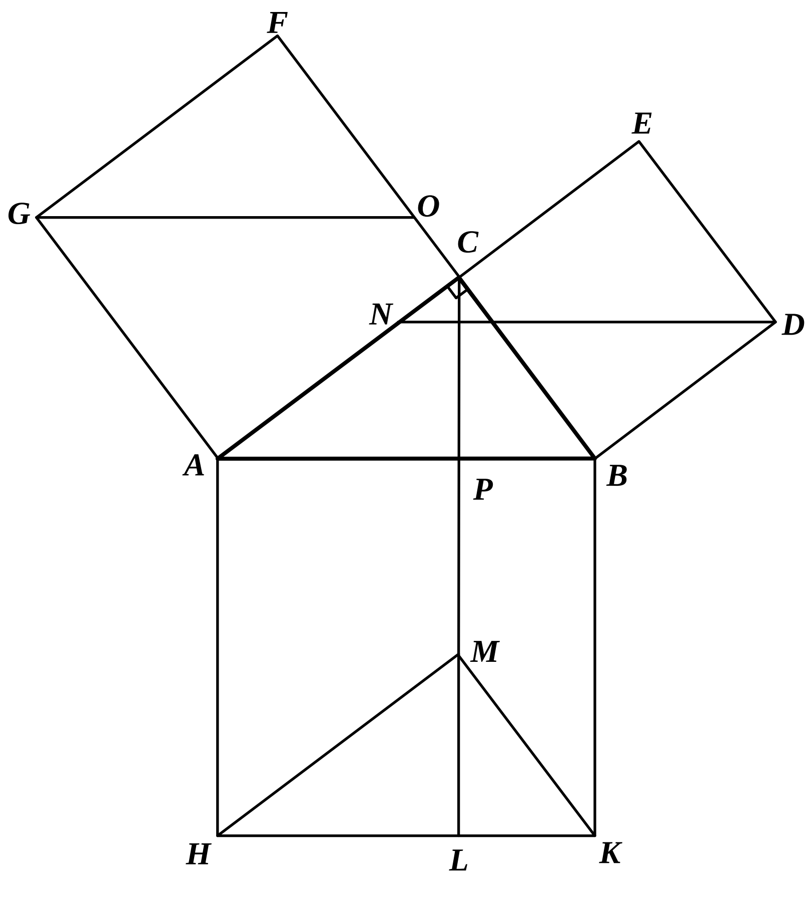
勾股定理證明-G037

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於L點，並交$\overline{AB}$於P點。
3. 從D點作$\overline{BA}$的平行線交$\overline{CA}$於N點，從G點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{FC}$於O點。
4. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{CL}$於M點。
5. 連接$\overline{KM}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形$AHKB$的面積可表示成兩個長方形的面積和，再表示成兩個平行四邊形的面積和，利用底長與高的面積關係式，轉換成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積和，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先由平行四邊形$AHMC$的條件，證明四邊形$BKMC$亦為平行四邊形：

因為 $\overline{HM} // \overline{AC}$ 又 $\overline{AH} // \overline{CM}$ ，所以四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形，得到 $\overline{CM} = \overline{AH}$ 。

進一步得到 $\overline{CM} = \overline{AH} = \overline{BK}$ ，又 $\overline{BK} // \overline{CM}$ ，所以四邊形 $BKMC$ 為平行四邊形。

2. 證明平行四邊形 $BKMC$ 與平行四邊形 $BAND$ 全等：

因為 $\overline{BC} = \overline{BD}, \overline{BK} = \overline{BA}$，且 $\angle CBK = 90^{\circ} + \angle CBA = \angle DBA$，所以

$$\text{平行四邊形} BKMC \cong \text{平行四邊形} BAND.$$

3. 證明平行四邊形 $AHMC$ 與平行四邊形 $ABOG$ 全等：

同理，因為 $\overline{AH} = \overline{AB}, \overline{AC} = \overline{AG}$ ，且 $\angle CAH = 90^{\circ} + \angle CAB = \angle GAB$ ，所以

$$\text{平行四邊形} AHMC \cong \text{平行四邊形} ABOG.$$

4. 證明長方形 $BKLP$ 與正方形 $CBDE$ 面積相等：

當平行四邊形 $BAND$ 底長為 $\overline{BD}$ 時，高為 $\overline{BC}$ ，得到平行四邊形 $BAND$ 面積＝

$\overline{BD} \times \overline{BC}$ ，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形} BKLP \text{ 面積} &= \text{平行四邊形} BKMC \text{ 面積(等底等高)} \\ &= \text{平行四邊形} BAND \text{ 面積(全等)} \\ &= \overline{BD} \times \overline{BC} \\ &= \text{正方形} CBDE \text{ 面積(等底等高)},\end{aligned}$$

5. 證明長方形 $AHLP$ 與正方形 $CAGF$ 面積相等：

同理，當平行四邊形 $ABOG$ 底長為 $\overline{AG}$ 時，高為 $\overline{AC}$ ，得到平行四邊形 $ABOG$ 面積

＝ $\overline{AG} \times \overline{AC}$ ，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形} AHLP \text{ 面積} &= \text{平行四邊形} AHMC \text{ 面積(等底等高)} \\ &= \text{平行四邊形} ABOG \text{ 面積(全等)} \\ &= \overline{AG} \times \overline{AC} \\ &= \text{正方形} CAGF \text{ 面積(等底等高)}.\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

因為

$$\begin{aligned}\text{正方形} AHKB \text{ 面積} &= \text{長方形} BKLP \text{ 面積} + \text{長方形} AHLP \text{ 面積} \\ &= \text{正方形} CBDE \text{ 面積} + \text{正方形} CAGF \text{ 面積}.\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 57). Amsterdam: A. Versluys.
   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry***(**p.160**)**. New York : Macmillan and co.
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 4*(6/7), 168-170.
2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，如果運用旋轉的概念來判斷，就可以很輕鬆直觀得到平行四邊形的全等關係，最後利用底與高的計算，就能證得畢氏定理關係式，此證明方法非常適合中學生的程度。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題輔助線畫法看似與 G033(歐幾里得證明)畫法不同，但只要將此題證明的平行四邊形區域找出對角線，即與 G033 的概念接近。