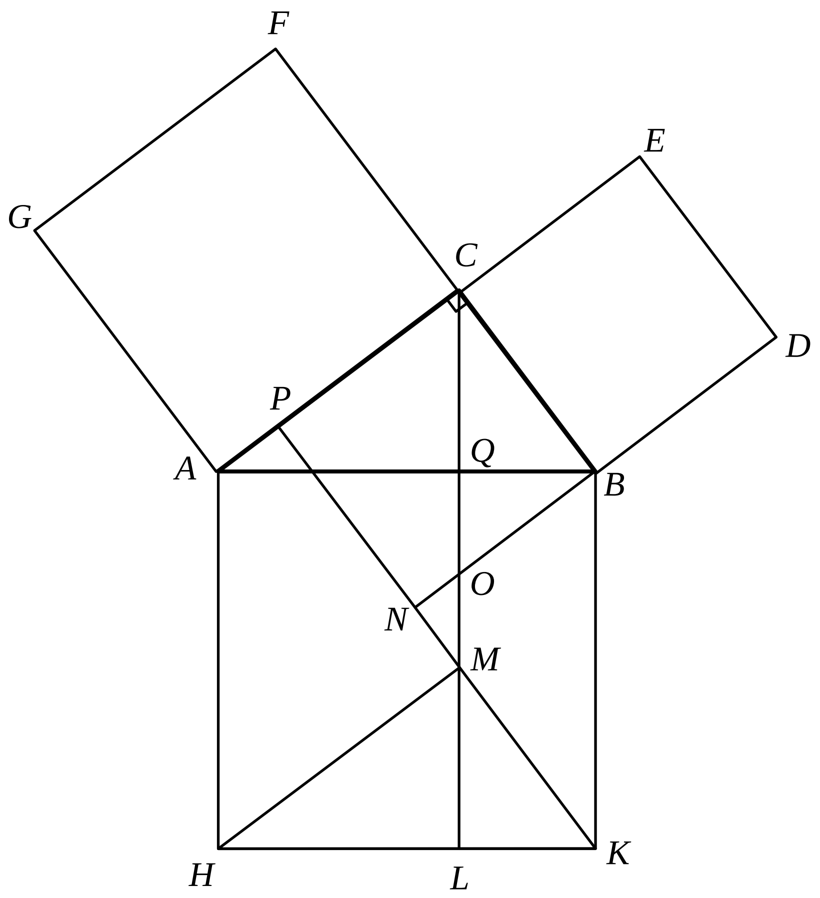
勾股定理證明-G036

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 以$\overline{CB}$為邊長作正方形$CBNP$，並連接$\overline{NK}$(於證明過程第 2 點說明$P-N-K$共線)。
3. 從C點作$\overline{BK}$的平行線交$\overline{HK}$於L點，交$\overline{AB}$於Q點，交$\overline{NB}$於O點，交$\overline{NK}$於M點。
4. 連接$\overline{HM}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形$AHKB$的面積可表示成兩個長方形的面積和，再表示成兩個平行四邊形的面積和，利用底長與高的面積關係式，轉換成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積和，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形NKB與三角形CAB全等：

因為 $\overline{NB}=\overline{CB}, \overline{KB}=\overline{AB}, \angle KBN=90^{\circ}-\angle NBA=\angle ABC$ ，所以

$$\Delta NKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

2. 證明 $\overline{NK}$ 與 $\overline{CB}$ 平行：

由 ΔNKB 與 ΔCAB 全等的結果，得到 $\angle BNK=90^{\circ}$ ，所以 $P-N-K$ 共線，且

$\overline{NK} // \overline{CB}$ 。

3. 證明長方形 $BKLQ$ 與正方形 $CBDE$ 面積相等：

由證明結果 $\overline{NK} // \overline{CB}$ ，與條件 $\overline{BK} // \overline{CL}$ ，得到四邊形 $BCMK$ 為平行四邊形。當平行

四邊形 $BCMK$ 底長為 $\overline{BC}$ 時，高為 $\overline{BN}$ ，得到

$$\begin{aligned}\text{長方形}BKLQ\text{面積} &= \text{平行四邊形}BCMK\text{面積}\\ &= \overline{BC}\times\overline{BN}\\ &= \overline{BC}\times\overline{BD}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}.\end{aligned}$$

4. 證明三角形 ABC 與三角形 MCP 全等：

因為 $\overline{PC}=\overline{CB}, \angle CPM=\angle BCA=90^{o}, \overline{CM}=\overline{BK}=\overline{BA}$ ，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta MCP\ (RHS \text{ 全等}).$$

5. 證明四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形：

已證明四邊形 $BCMK$ 為平行四邊形，得到 $\overline{CM}=\overline{BK}=\overline{AH}$ ，且 $\overline{CM} // \overline{BK} // \overline{AH}$ ，可

證得四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形。

6. 證明長方形 $AHLQ$ 與正方形 $CAGF$ 面積相等：

由證明結果 $\Delta ABC \cong \Delta MCP$ 可得到 $\overline{MP}=\overline{AC}$ ，當平行四邊形 $AHMC$ 底長為 $\overline{AC}$ 時，

高為 $\overline{PM}$ ，得到

$$\begin{aligned}\text{長方形}AHLQ\text{ 面積} &= \text{平行四邊形}AHMC\text{ 面積}\\ &= \overline{AC}\times\overline{MP}\\ &= \overline{AC}\times\overline{AC}\\ &= \text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

7. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

因為

$$\text{正方形}AHKB\text{面積}=\text{長方形}BKLQ\text{ 面積}+\text{長方形}AHLQ\text{ 面積}$$
$$=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 這個證明出自於以下書籍：
   J. M. Richardson(1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, *2*(2), 17.
2. 心得： 此證明的輔助線繪圖的結果皆與平行有關，學生較容易看出對應角與長度的關係，進而判斷四邊形圖形所滿足的平行性質，進而得到平行四邊形的對邊等長結果，再利用角度的互餘關係，得到三角形之間所滿足的全等性質，最後由底與高的計算關係，證得畢氏定理關係式。利用四邊形推移的關係計算面積。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題作圖與 G035 類似。