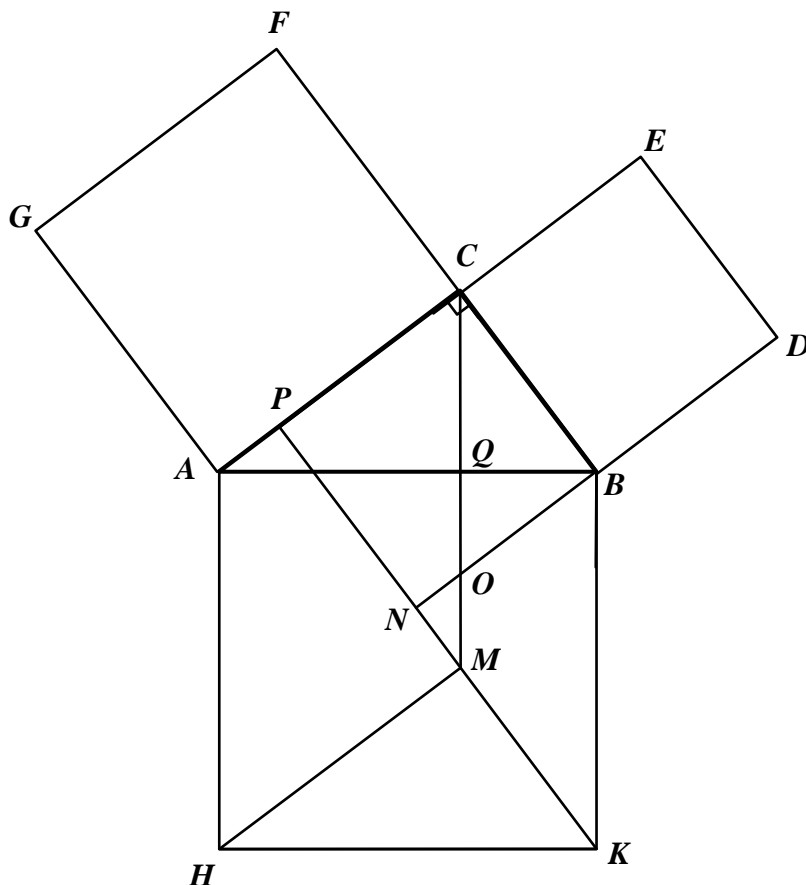


勾股定理證明-G035

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊，向外作一正方形 $AHKB$ ，以 \overline{BC} 為邊，向外作一正方形 $CBDE$ ，以 \overline{AC} 為邊，向外作一正方形 $CAGF$ 。
2. 以 \overline{CB} 為邊長作正方形 $CBNP$ ，並連接 \overline{NK} (於證明過程第 2 點說明 $P-N-K$ 共線)。
3. 從 C 點作 \overline{BK} 的平行線交 \overline{AB} 於 Q 點，交 \overline{NB} 於 O 點，交 \overline{NK} 於 M 點。
4. 連接 \overline{HM} 。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先三角形 MHK 的平移，說明正方形 $AHKB$ 的面積可表示成兩個平行四邊形的面積和，再利用底長與高的面積關係式，轉換成正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的面積和，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形 NKB 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{NB} = \overline{CB}$, $\overline{KB} = \overline{AB}$, $\angle KBN = 90^\circ - \angle NBA = \angle ABC$ ，所以

$$\triangle NKB \cong \triangle CAB \text{ (SAS 全等).}$$

2. 證明 \overline{NK} 與 \overline{CB} 平行，且 $P-N-K$ 共線：

由 $\triangle NKB$ 與 $\triangle CAB$ 全等的結果，得到 $\angle BNK = 90^\circ$ ，所以

$$P-N-K \text{ 共線，且 } \overline{NK} \parallel \overline{CB} .$$

3. 證明平行四邊形 $BCMK$ 與正方形 $CBDE$ 面積相等：

由證明結果 $\overline{NK} \parallel \overline{CB}$ ，與條件 $\overline{BK} \parallel \overline{CM}$ ，得到四邊形 $BCMK$ 為平行四邊形。當平行四邊形 $BCMK$ 底長為 \overline{BC} 時，高為 \overline{BN} ，得到

$$\text{平行四邊形 } BCMK \text{ 面積} = \overline{BC} \times \overline{BN} = \overline{BC} \times \overline{BD} = \text{正方形 } CBDE \text{ 面積.}$$

4. 證明三角形 ABC 與三角形 MCP 全等：

因為 $\overline{PC} = \overline{CB}$, $\angle CPM = \angle BCA = 90^\circ$, $\overline{CM} = \overline{BK} = \overline{BA}$ ，所以

$$\triangle ABC \cong \triangle MCP \text{ (RHS 全等).}$$

5. 證明四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形：

已證明四邊形 $BCMK$ 為平行四邊形，得到 $\overline{CM} = \overline{BK} = \overline{AH}$ ，且 $\overline{CM} \parallel \overline{BK} \parallel \overline{AH}$ ，可證得四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形。

6. 證明平行四邊形 $AHMC$ 與正方形 $CAGF$ 面積相等：

由證明結果 $\triangle ABC \cong \triangle MCP$ 可得到 $\overline{MP} = \overline{AC}$ ，當平行四邊形 $AHMC$ 底長為 \overline{AC} 時，高為 \overline{PM} ，得到

$$\text{平行四邊形 } AHMC \text{ 面積} = \overline{AC} \times \overline{MP} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \text{正方形 } CAGF \text{ 面積.}$$

7. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

因為

$$\begin{aligned} \text{正方形 } AHKB \text{ 面積} &= \overline{AH} \times \overline{AB} \\ &= \overline{AH} \times (\overline{BQ} + \overline{AQ}) \\ &= \overline{BK} \times \overline{BQ} + \overline{AH} \times \overline{AQ} \\ &= \text{平行四邊形 } BCMK \text{ 面積} + \text{平行四邊形 } AHMC \text{ 面積} \\ &= \text{正方形 } CBDE \text{ 面積} + \text{正方形 } CAGF \text{ 面積} \end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 23). Amsterdam: A.

Versluys.

Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.161). New York : Macmillan and co.

2. 心得：此證明的輔助線繪圖的結果皆與平行有關，一開始證明其實無法立即看出對應角與對應邊的關係，須利用角度的互餘關係，得到三角形之間所滿足的全等性質，或判斷四邊形圖形所滿足的平行性質，才能進而得到平行四邊形的底高等長結果，最後最後由底與高的計算關係，證得畢氏定理關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 說明：此題作圖與 G036 類似。