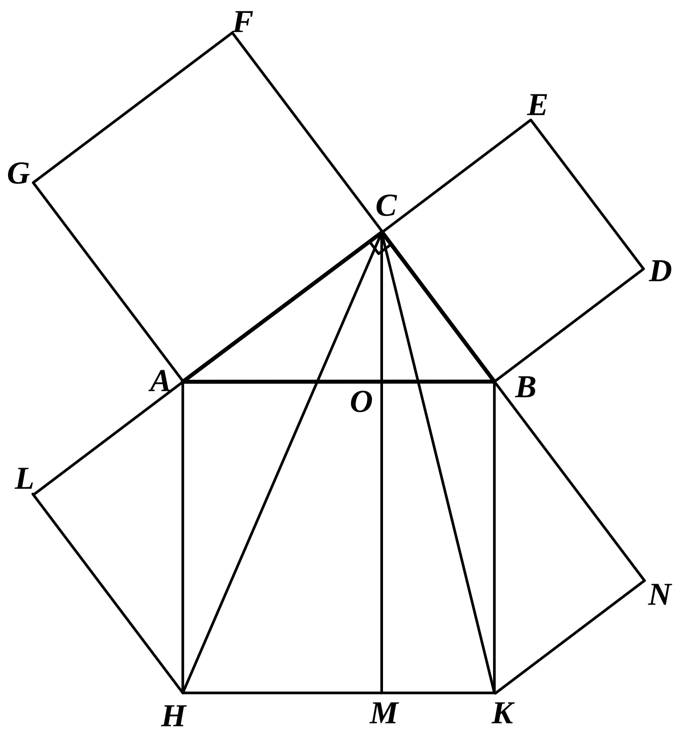
勾股定理證明-G034

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於M點，且交$\overline{AB}$於O點。
3. 延長$\overline{CA}$，使得$\overline{AL}=\overline{CB}$，連接$\overline{LH}$。
4. 延長$\overline{CB}$，使得$\overline{BN}=\overline{CA}$，連接$\overline{NK}$。
5. 連接$\overline{CK}$與$\overline{CH}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形$AHKB$所切割的長方形區域，能以三角形表示其二分之一的面積，再由同底等高的關係，分別表示出正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形NBK與三角形CAB全等，且三角形ALH與三角形BCA全等：

   因為$\overline{BN}=\overline{AC},\overline{BK}=\overline{AB},\angle NBK=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$，所以

$$\Delta NBK \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

同理，因為 $\overline{AL}=\overline{BC}, \overline{AH}=\overline{BA}, \angle LAH = 90^{\circ} - \angle CAB = \angle CBA$ ，所以

$$\Delta ALH \cong \Delta BCA \text{(SAS 全等)}.$$

2. 證明三角形 CBK 的面積為二分之一的正方形 $CBDE$ 面積；三角形 CAH 的面積為二分之一的正方形 $CAGF$ 面積：

   當 ΔCBK 面積以底長 $\overline{CB}$ 、高為 $\overline{KN}$ 表示時，得到

$$\Delta CBK\text{的面積}=\frac{1}{2}\overline{CB}\times\overline{KN}=\frac{1}{2}\overline{CB}\times\overline{CB},$$

   同理，當 ΔCAH 面積以底長 $\overline{CA}$ 、高為 $\overline{HL}$ 表示時，得到

$$\Delta CAH\text{的面積}=\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{HL}=\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CA}.$$

3. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}BKMO\text{面積}+\text{長方形}AHMO\text{面積}\\ &= \overline{BK}\times\overline{BO}+\overline{AH}\times\overline{AO}\\ &= 2\Delta CBK\text{面積}+2\Delta CAH\text{面積}\\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積}.\end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 16). Amsterdam: A. Versluys.
   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry***(**p.155**)**. New York : Macmillan and co.
2. 心得： 此證明利用適當的輔助線，將正方形 $AHKB$ 所切割的長方形區域，以三角形不同底高組合的面積表示法，轉換成表示正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的面積，最後推出了畢氏定理的關係式，這種長度之間透過圖形表現的轉換實在很有趣。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●