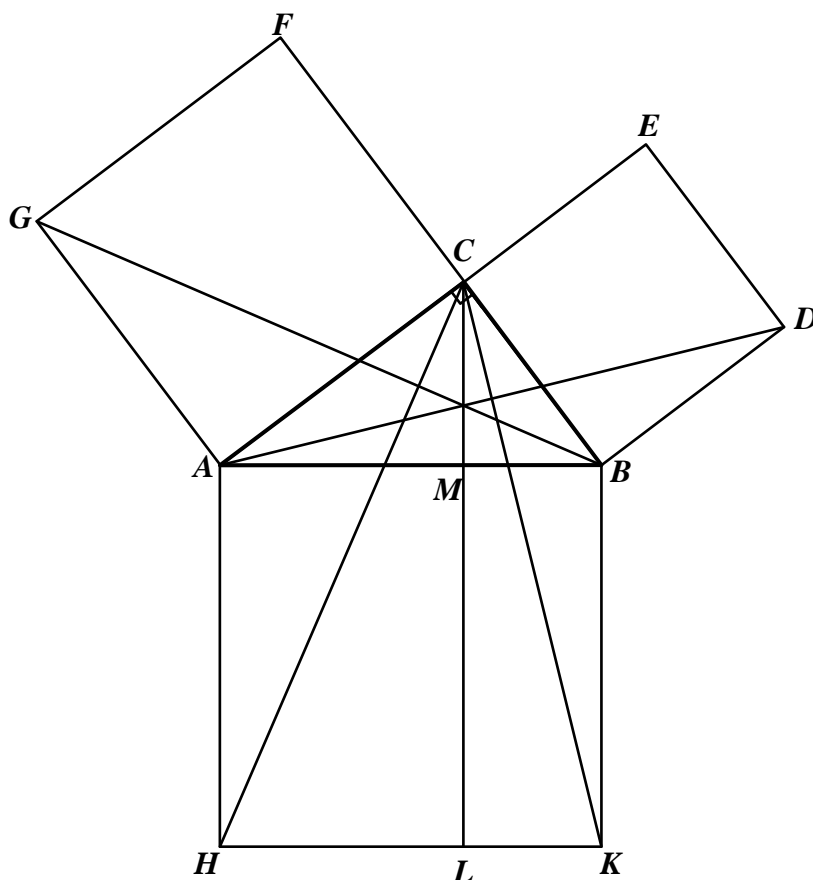


勾股定理證明-G033

【作輔助圖】

1. 以 \overline{AB} 為邊，向外作一正方形 $AHKB$ ，以 \overline{BC} 為邊，向外作一正方形 $CBDE$ ，以 \overline{AC} 為邊，向外作一正方形 $CAGF$ 。
2. 從 C 點作 $\overline{CL} \perp \overline{HK}$ ，交 \overline{HK} 於 L 點，交 \overline{AB} 於 M 點。
3. 連接 \overline{AD} , \overline{BG} , \overline{CK} 與 \overline{CH} 。



【求證過程】（歐幾里得證明）

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先將正方形 $AHKB$ 切割為兩個長方形的區塊，再利用底長與高的面積關係式，表示成正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的面積，再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 CAH 與三角形 GAB 全等：

因為 $\overline{AC} = \overline{AG}$, $\overline{AH} = \overline{AB}$, $\angle CAH = 90^\circ + \angle CAB = \angle GAB$ ，所以

$$\triangle CAH \cong \triangle GAB \text{ (SAS 全等).}$$

2. 證明三角形 CBK 與三角形 DBA 全等：

因為 $\overline{BK} = \overline{BA}$, $\overline{BC} = \overline{BD}$, $\angle CBK = \angle DBA$ ，所以

$$\triangle CBK \cong \triangle DBA \text{ (SAS 全等).}$$

3. 求出三角形 DBA 與三角形 GAB 的面積：

當 $\triangle DBA$ 底長為 \overline{BD} 時，高為 \overline{BC} ，得到

$$\triangle DBA \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{BC},$$

同理，當 $\triangle GAB$ 底長為 \overline{AG} 時，高為 \overline{AC} ，得到

$$\triangle GAB \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{AC}.$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

因為

$$\begin{aligned} \text{正方形 } AHKB \text{ 面積} &= \text{長方形 } BKLM \text{ 面積} + \text{長方形 } AHLM \text{ 面積} \\ &= \overline{BK} \times \overline{BM} + \overline{AH} \times \overline{AM} \\ &= 2\triangle CBK \text{ 面積} + 2\triangle CAH \text{ 面積} \\ &= 2\triangle DBA \text{ 面積} + 2\triangle GAB \text{ 面積} \\ &= \overline{BD} \times \overline{BC} + \overline{AG} \times \overline{AC} \\ &= \text{正方形 } CBDE \text{ 面積} + \text{正方形 } CAGF \text{ 面積}. \end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 10). Amsterdam: A.

Versluys.

以下文獻有記載：

Heath's *Mathematical Monographs*, 1900, No. 1, p. 18, proof I

Fourrey's *Curiosities Geometriques*, p.70, fig. a.

2. 心得：利用全等與旋轉的概念證明。以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，再畫出五條輔助線，透過旋轉後對應的三角形區域，可清楚看出底高

的面積計算式，進而推出畢氏定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 說明：此證明為非常著名的歐幾里得(Euclid)證明，其過程於西元前三百年發現。這是西方數學上最有名的證法。它記載於歐幾里得所編著，對西方數學傳統，甚至是文化傳統影響最大的一部著作《幾何原本》(The Elements)中，就是卷一的命題四十七。