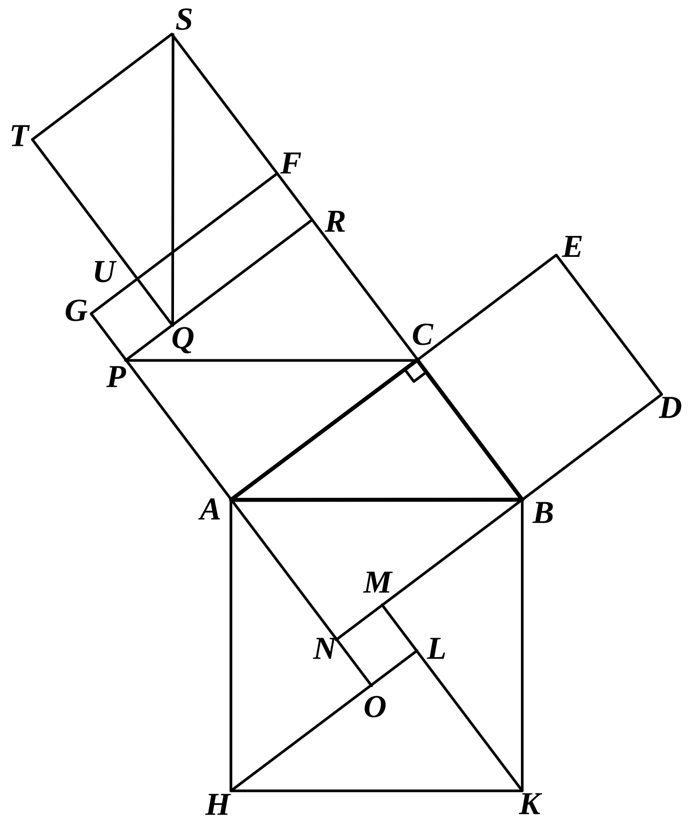
勾股定理證明-G032

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 在正方形$AHKB$的內部，分別從H, K兩頂點作$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的平行線，再延長$\overline{GA}$, $\overline{DB}$，使此四直線交於M,N,O,L四點。
3. 從C點作$\overline{CP}//\overline{BA}$，從$P$點作$\overline{PR}//\overline{AC}$。
4. 延長$\overline{CF}$使得$\overline{FS}=\overline{BC}$，作正方形$FSTU$，並延長$\overline{TU}$，交$\overline{PR}$於$Q$點，連接$\overline{QS}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，證明正方形$AHKB$所切割的區塊，經過拼合後所成的區域，與正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域面積總合相等，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明正方形$AHKB$內的四個三角形皆全等於三角形CAB：

因為$\overline{AH}=\overline{AB}$，因為$\angle OAH=90^{\circ}-\angle BAO=\angle CAB$，由平行關係得到

$\angle AOH = \angle ACB = 90^{\circ}$，所以

$$\Delta OAH \cong \Delta CAB(\text{AAS 全等}).$$

同理，因為 $\overline{AB} = \overline{HK} = \overline{KB}$ ，再由平行關係及垂直的互餘關係得到對應角相等，所以

$$\Delta CAB \cong \Delta LHK \cong \Delta MKB \cong \Delta NBA(\text{ASA 全等}) .$$

2. 再證明三角形 ACP、三角形 RPC、三角形 RSQ 與三角形 TQS 皆全等於三角形 CAB：
因為四邊形 $PABC$ 與四邊形 $PACR$ 皆為平行四邊形，所以

$$\Delta CAB \cong \Delta ACP \cong \Delta RPC.$$

又長方形 $QRST$ 中， $\overline{SR} = \overline{QT} = \overline{SF} + \overline{FR} = \overline{BC} + (\overline{CA} - \overline{CB}) = \overline{CA}$ 且

$\overline{RQ} = \overline{TS} = \overline{SF} = \overline{CB}, \angle QRS = \angle STQ = \angle ACB = 90^{\circ}$，所以

$$\Delta CAB \cong \Delta RSQ \cong \Delta TQS \ (\text{SAS 全等}).$$

3. 證明四邊形 $MNOL$ 與四邊形 $GPQU$ 皆為邊長 $\overline{CA} - \overline{CB}(= b - a)$ 的正方形：

因為 $\Delta CAB \cong \Delta OAH \cong \Delta LHK \cong \Delta MKB \cong \Delta NBA$，所以

$\angle HLK = \angle KMB = \angle BNA = \angle AOH = \angle ACB = 90^{\circ}$，得到四邊形 $MNOL$ 四角皆為直角，且邊長 $\overline{MN} = \overline{BN} - \overline{BM} = \overline{CA} - \overline{CB} = \overline{ML} = \overline{LO} = \overline{ON}$ ，又由作圖可知四邊形 $GPQU$ 四角皆為直角，且由 $\Delta CAB \cong \Delta RSQ \cong \Delta TQS$ 可知，邊長

$\overline{PQ} = \overline{PR} - \overline{QR} = \overline{CA} - \overline{CB} = \overline{QU} = \overline{UG} = \overline{GP}$ ，所以可證得

$$\text{正方形}MNOL \cong \text{正方形}GPQU.$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$AHKB$面積＝4ΔCAB面積＋正方形$MNOL$面積
＝長方形$ACRP$面積＋長方形$QRST$面積＋正方形$GPQU$面積
＝正方形$TUFS$面積＋正方形$CAGF$面積
＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由一位失明女子 Miss E. A. Coolidge 所證出。證明過程記載於 Journal of Education, V. XXVIII, 1888, p. 17, 26 th proof.
2. 心得：正方形 *AHKB* 所切割的形狀只有兩種，但經過巧妙的拼圖後，只要仔細觀察，就能得到對應的正方形面積了，這題的證明方法相當有創意。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	