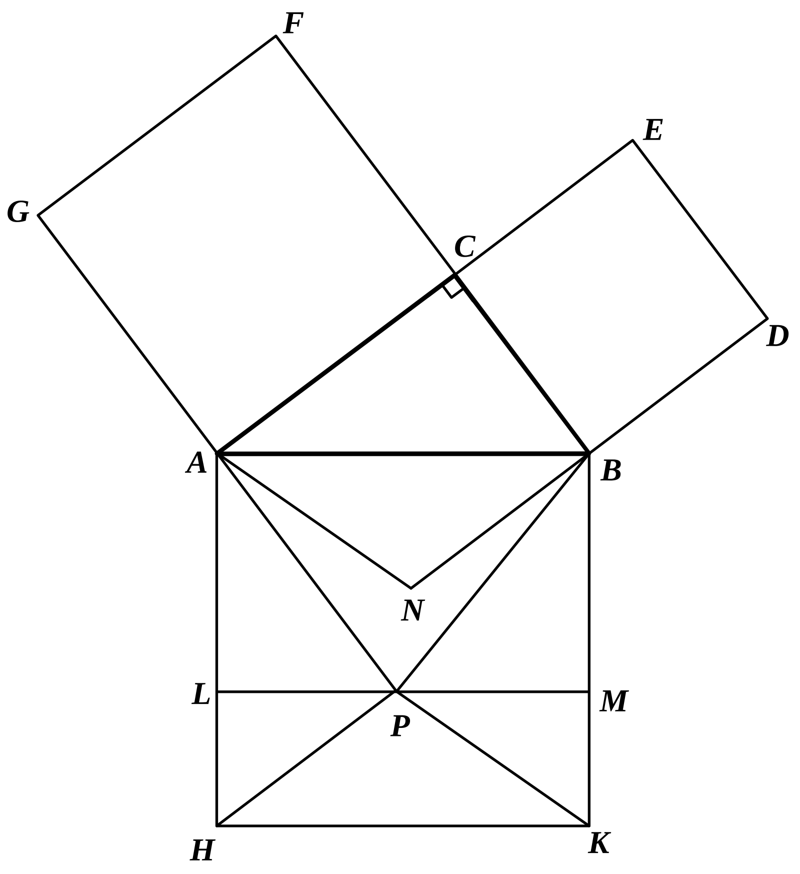
勾股定理證明-G031

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{GA}$，使得$\overline{AP}=\overline{AG}$，並連接$\overline{HP}$。
3. 延長$\overline{DB}$，使得$\overline{BN}=\overline{BC}$，並連接$\overline{AN}$。
4. 從點P作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AH}$於L點，且交$\overline{BK}$於M點。
5. 連接$\overline{BP}$與$\overline{PK}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，再由正方形$AHKB$所分割的兩個長方形$LHKM$與長方形$ALMB$，分別透過三角形的底高面積運算式，求出其對應的正方形$CBDE$與正方形$CAGF$面積，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形PAH與三角形CAB全等：

因為$\overline{AB}=\overline{AH}, \angle PAH=90^{\circ}-\angle BAP=\angle CAB, \overline{AP}=\overline{AC}$，所以

$$\Delta PAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

2. 證明三角形PHK與三角形NBA全等：

由證明結果$\Delta PAH \cong \Delta CAB$得到$\overline{PH}=\overline{CB}=\overline{NB}$，又

$\angle PHK=90^{\circ}-\angle PHA=90^{\circ}-\angle CBA=\angle NBA, \overline{HK}=\overline{BA}$， 所以

$$\Delta PHK \cong \Delta NBA \text{(SAS 全等)}.$$

3. 證明三角形PHK與三角形APB的面積，分別是正方形$CBDE$與正方形$CAGF$面積的一半：

$$\begin{aligned}\Delta PHK\text{面積}&=\Delta NBA\text{面積}(\text{底為}\overline{NB}=a,\text{高為}\overline{BC}=a)\\&=\frac{1}{2}\overline{NB}\times\overline{BC}\\&=\frac{1}{2}a^2\\&=\frac{1}{2}\text{正方形}CBDE\text{面積},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta APB\text{面積}&=\frac{1}{2}\overline{AP}\times\overline{AC}(\text{底為}\overline{AP}=b,\text{高為}\overline{AC}=b)\\&=\frac{1}{2}b^2\\&=\frac{1}{2}\text{正方形}CAGF\text{面積}.\end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積}&=\text{長方形}LHKM\text{面積}+\text{長方形}ALMB\text{面積}\\&=2\Delta PHK\text{面積}+2\Delta APB\text{面積}\\&=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：由荷蘭科學家惠更斯(Christiaan Huygens1629~1695) 所證明。之後在

以下的書籍中也找到證明：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 25). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此題的輔助線作圖很簡捷，利用延長固定長度的作圖方法，可以容易的看出對應角與對應邊的相等，再利用全等的區域轉換，由正方形 *AHKB* 所分割的兩個長方形，透過三角形的底高面積運算式，最後推出畢氏定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		