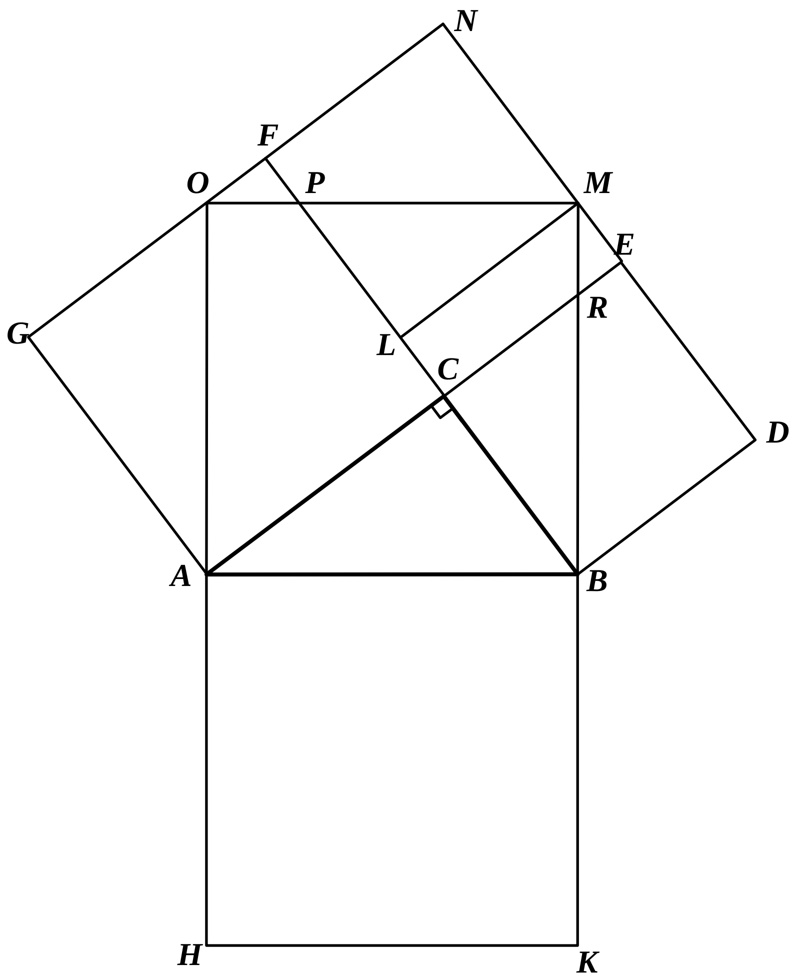
勾股定理證明-G030

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{GF}$與延長$\overline{DE}$，交於N點。
3. 延長$\overline{HA}$交$\overline{GF}$於O點。
4. 延長$\overline{KB}$交$\overline{NE}$於M點，交$\overline{CE}$於R點。
5. 連接$\overline{OM}$，交$\overline{CF}$於P點。
6. 從M點作$\overline{CE}$的平行線，交$\overline{CF}$於L點。



【求證過程】

先證明四邊形$AOMB$與正方形$AHKB$全等，再由正方形$AOMB$所切割的區塊，間接拼合成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域，最後由面積相等的關係，推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形GAO與三角形CAB全等：

   因為$\angle OGA=\angle BCA=90^\circ,\overline{AG}=\overline{AC},\angle GAO=90^\circ-\angle OAC=\angle CAB$，所以

   $$\Delta GAO\cong\Delta CAB\,(\text{ASA 全等}).$$

2. 證明三角形MBD與三角形ABC全等：

   同理，因為$\angle MDB=\angle ACB=90^\circ,\overline{BD}=\overline{BC},\angle MBD=90^\circ-\angle CBR=\angle ABC$，

   所以

   $$\Delta MBD\cong\Delta ABC\,(\text{ASA 全等}).$$

3. 證明正方形$AHKB$與正方形$OABM$全等：

   由證明結果$\Delta GAO\cong\Delta CAB$與$\Delta MBD\cong\Delta ABC$得知$\overline{AO}=\overline{AB}$與$\overline{BM}=\overline{AB}$，又

   $\angle OAB=\angle MBA=90^\circ$，所以四邊形$OABM$為正方形，得到

   $$\text{正方形}AHKB\cong\text{正方形}OABM.$$

4. 找到與三角形CAB全等的所有三角形：

   已得證四邊形$OABM$為正方形，所以$\overline{AB}=\overline{OM}$，又$\overline{ON}\,//\,\overline{AC}$，$\overline{MN}\,//\,\overline{BC}$，所以

   $$\Delta CAB\cong\Delta NOM\,(\text{ASA 全等}).$$

   同理，由共同邊$\overline{BM}$與平行關係得到對應角相等，所以$\Delta BML\cong\Delta AOG\,(\text{ASA 全等})$，因此

   $$\Delta CAB\cong\Delta GAO\cong\Delta DMB\cong\Delta LBM\cong\Delta NOM.$$

5. 證明三角形MPL與三角形BRC全等：

   因為

   $\angle PML=90^\circ-\angle LMB=90^\circ-\angle CRB=\angle RBC,\overline{LM}=\overline{CE}=\overline{CB},\angle PLM=\angle RCB=90^\circ$，

   所以

   $$\Delta MPL\cong\Delta BRC\,(\text{ASA 全等}).$$

6. 證明四邊形$FPMN$與四邊形$ERBD$全等：

   因為三角形$\Delta MPL\cong\Delta BRC$可得到$\overline{BR}=\overline{MP}$，又$\overline{FN}=\overline{NM}=\overline{DB}=\overline{ED}$，且

   $\angle FNM=\angle EDB=90^\circ,\angle NMP=90^\circ-\angle FOP=90^\circ-\angle DMB=\angle DBR$，所以

$$\text{四邊形}FPMN \cong \text{四邊形}ERBD.$$

7. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：
 因為

$$\Delta NOM\text{ 面積}=\Delta OPF\text{ 面積}+\text{四邊形}FPMN\text{ 面積}$$
$$=\Delta OPF\text{ 面積}+\text{四邊形}ERBD\text{ 面積},$$

 所以

 正方形$AHKB$面積
 ＝正方形$OABM$ 面積
 ＝ΔMPL 面積＋四邊形$ACPO$面積＋ΔCAB面積＋ΔBML面積
 ＝ΔBRC 面積＋四邊形$ACPO$面積＋ΔNOM 面積＋ΔAOG面積
 ＝ΔBRC 面積＋四邊形$ACPO$面積＋(ΔOPF 面積＋四邊形$ERBD$面積)＋ΔAOG面積
 ＝正方形$CBDE$ 面積＋正方形$CAGF$ 面積.

 得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

 即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊
 Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383
2. 心得：此證明的作圖方式是先將最大的正方形向上平移，進而得到切割的基本元件，再由適當的作延長線與平行線，得到更小的元件來拼圖，由平行關係可容易檢驗出元件之間全等的關係。證明過程是先透過全等圖形，間接由不同的區域所切割的新元件來轉換區域重新拼圖，如果用電腦動畫效果來呈現此證明，學生的理解會一定更清晰。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此題作圖方式，其實可以直接將正方形 $ABMO$ 取代正方形 $AHKB$ ，作圖可以更簡捷。