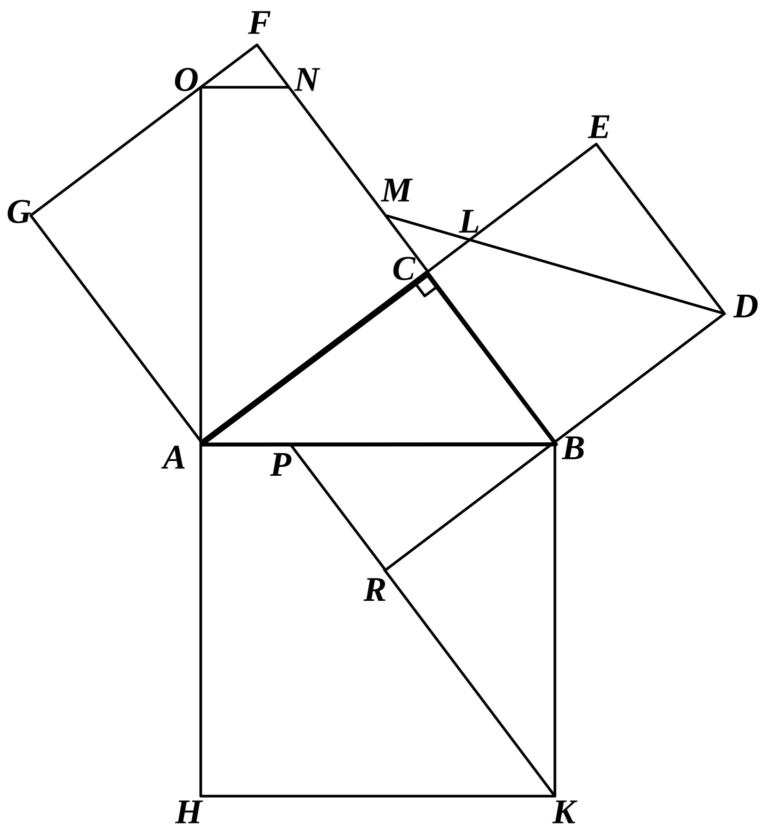
勾股定理證明-G029

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{HA}$，交$\overline{GF}$於O點。
3. 從K點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overline{AB}$於P點。
4. 從O點作$\overline{AB}$的平行線，交$\overline{CF}$於N點。從B點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{PK}$於R點。
5. 在$\overline{BF}$上取一點M，使得$\overline{BM}=\overline{CA}$，連結$\overline{MD}$交$\overline{CE}$於$L$點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，先證明輔助線所切割的區塊，能間接將正方形$AHKB$面積轉換成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的面積,再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形RKB與三角形GAO皆與三角形CAB全等：

因為$\overline{CA}=\overline{GA},\angle ACB=\angle AGO=90^{\circ},\angle CAB=90^{\circ}-\angle CAB=\angle GAO$，所以

$$\Delta CAB \cong \Delta GAO \text{(ASA 全等)}.$$

同理，因為 $\overline{KB}=\overline{AB}, \angle RBK = 90^\circ - \angle RBP = \angle CBA$，由直角三角形關係可推得 $\angle RKB = \angle CAB$，所以

$$\Delta RKB \cong \Delta CAB \text{(ASA 全等)},$$

因此

$$\Delta CAB \cong \Delta RKB \cong \Delta GAO.$$

2. 證明三角形 BMD 與三角形 CAB 全等：

由條件知 $\overline{CA}=\overline{BM}$，又 $\angle ACB = \angle MBD = 90^\circ$，$\overline{CB}=\overline{BD}$，所以

$$\Delta CAB \cong \Delta BMD \text{(SAS 全等)}.$$

3. 證明三角形 PRB 與三角形 LED 全等：

因為 $\overline{BR}=\overline{CB}=\overline{DE}, \angle PRB = \angle LED = 90^\circ$，且

$$\angle RBP = 90^\circ - \angle RBK = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - \angle BDM = \angle EDL,$$

所以

$$\Delta PRB \cong \Delta LED \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $AHKP$ 與四邊形 $OABN$ 全等：

因為 $\overline{AH}=\overline{HK}=\overline{AB}=\overline{OA}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\text{四邊形}AHKP \cong \text{四邊形}OABN.$$

5. 證明三角形 OFN 與三角形 MCL 全等：

因為 $\overline{FO}=\overline{GF}-\overline{GO}=b-a=\overline{MB}-\overline{CB}=\overline{CM}, \angle OFN = \angle MCL = 90^\circ$，且 $\angle FON = \angle CAB = \angle CML$，所以

$$\Delta OFN \cong \Delta MCL \text{(ASA 全等)}.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形 $AHKB$ 面積
＝ΔPRB 面積＋ΔBRK 面積＋四邊形 $AHKP$ 面積
＝ΔLED 面積＋ΔDBM 面積＋四邊形 $OABN$ 面積
＝ΔLED 面積＋(四邊形 $BDLC$ 面積＋ΔMCL 面積)
＋(四邊形 $OACN$ 面積＋ΔCAB 面積)
＝(ΔLED 面積＋四邊形 $BDLC$ 面積)＋(ΔOFN 面積
＋四邊形 $OACN$ 面積＋ΔGAO 面積)
＝正方形 $CBDE$ 面積＋正方形 $CAGF$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1897). New and Old Proofs of thePythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *4*(6/7), 168-170.
2. 心得：此證明是先將斜邊上的正方形做大範圍的切割，再由小正方形的邊界作切割得到更小的元件，透過全等的區域轉換成兩個小區塊後再重新拼圖，最後推出畢氏定理的關係式。此題類似 G025 拼圖的概念，但拼圖過程中會超出正方形所圍出的範圍。如果能用電腦動畫的效果來呈現，學生的理會一定更清晰。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		