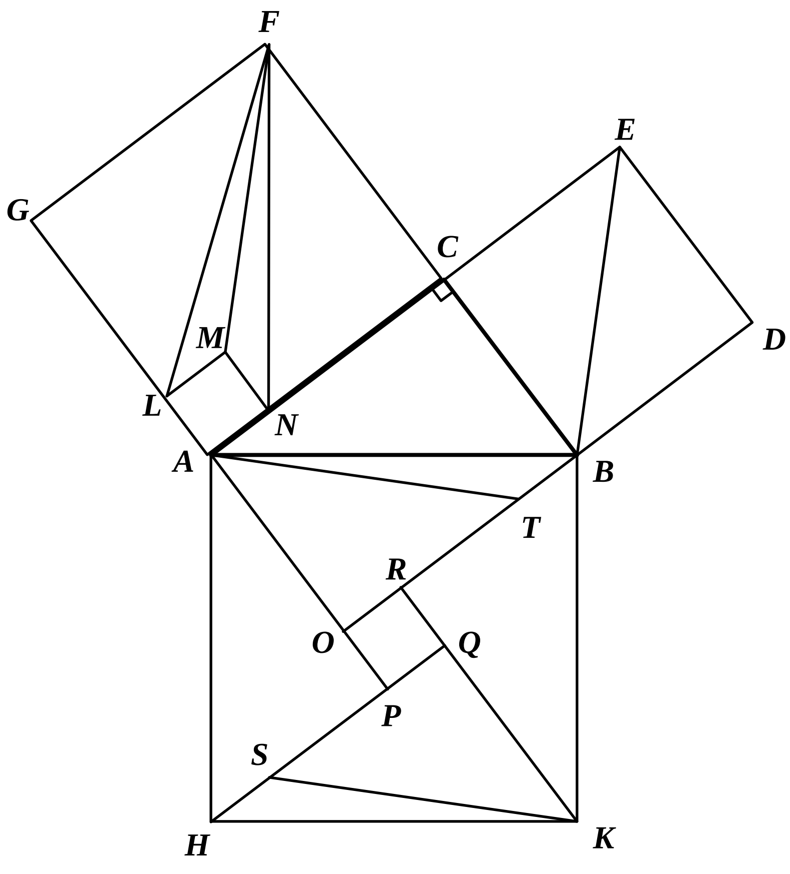
勾股定理證明-G028

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 在正方形$AHKB$的內部，從兩個頂點A,K作平行線平行$\overline{CB}$，從兩個頂點H,B作平行線平行$\overline{CA}$，交於O,P,Q,R四交點，
3. 在$\overline{BR}$上取一點T，使得$\overline{BT}=\overline{OR}$，連接$\overline{AT}$。
4. 在$\overline{HP}$上取一點S，使得$\overline{HS}=\overline{QP}$，連接$\overline{KS}$。
5. 在$\overline{AC},\overline{AG}$上分別取二點$N,L$，使得$\overline{AN}=\overline{AL}=\overline{OR}$，作正方形$ANML$。
6. 連接$\overline{FN}$,$\overline{FM}$,$\overline{FL}$與$\overline{EB}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形$CBDE$與正方形$CAGF$所切割出的區塊，能拼合成正方形$AHKB$的區域，再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 由$\overline{AB}=\overline{AH}=\overline{HK}=\overline{KB}$與平行關係得到對應角相等，可證明三角形$CAB$、三角形$PAH$、三角形$QHK$、三角形$RKB$與三角形$OBA$皆全等：
   因為四邊形$ACBO$為長方形，所以
   $$\Delta CAB \cong \Delta OBA.$$
   因為$\overline{AH}=\overline{AB}$，且$\angle PAH=90^\circ-\angle BAO=\angle CAB$與$\angle APH=\angle ACB=90^\circ$，所以
   $$\Delta CAB \cong \Delta PAH \text{ (AAS 全等).}$$
   同理，由$\overline{AB}=\overline{AH}=\overline{HK}=\overline{KB}$與平行關係得到對應角相等，可證明
   $$\Delta CAB \cong \Delta PAH \cong \Delta QHK \cong \Delta RKB \cong \Delta OBA.$$
2. 證明正方形$OPQR$與正方形$ANML$全等：
   由證明 1.可知四邊形$OPQR$四邊長皆為$\overline{CA}-\overline{CB}$，且由平行關係可得四頂角皆為直角，所以四邊形$OPQR$為正方形，又$\overline{AN}=\overline{OR}$，因此可得
   $$\text{正方形}ANML \cong \text{正方形}OPQR.$$
3. 證明三角形DEB、三角形CBE、三角形QSK與三角形OTA皆全等：
   由證明結果$\Delta CAB \cong \Delta QHK \cong \Delta OBA$可知$\overline{QK}=\overline{OA}=\overline{CB}$，又$\overline{HS}=\overline{QP}$，可得到
   $$\overline{QS}=\overline{HQ}-\overline{HS}=\overline{CA}-(\overline{CA}-\overline{CB})=b-(b-a)=a=\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{KQ}，$$
   又因為$\angle SQK=\angle ECB=90^\circ$，得$\Delta CBE$和$\Delta QSK$均為等腰直角三角形，所以
   $$\Delta CBE \cong \Delta QSK \text{ (SAS 全等).}$$
   同理可證依照對稱性及全等關係可得
   $$\Delta DEB \cong \Delta CBE \cong \Delta QSK \cong \Delta OTA \text{ (SAS 全等).}$$
4. 證明三角形CAB、三角形CFN與三角形GFL皆全等：
   因為$\overline{NA}=\overline{OR}=\overline{CA}-\overline{CB}$，得到
   $$\overline{CN}=\overline{CA}-\overline{NA}=\overline{CA}-(\overline{CA}-\overline{CB})=\overline{CB}$$
   又$\overline{CF}=\overline{AC}$，$\angle FCN=\angle ACB=90^\circ$，所以

$$\Delta CFN \cong \Delta CAB \text{ (SAS 全等).}$$

同理可證

$$\Delta CAB \cong \Delta CFN \cong \Delta GFL \text{ (SAS 全等).}$$

5. 證明三角形 TBA、三角形 SHK、三角形 MNF 與三角形 MLF 皆全等：

因為 $\angle TBA = \angle SHK = \angle CAB$, $\angle MNF = 90^\circ - \angle CNF = 90^\circ - \angle CBA = \angle CAB$，同理 $\angle MLF = \angle CAB$，所以 $\angle TBA = \angle SHK = \angle MNF = \angle MLF$，又 $\overline{AB} = \overline{KH} = \overline{FN} = \overline{FL}$ 與 $\overline{BT} = \overline{SH} = \overline{MN} = \overline{ML}$，所以

$$\Delta TBA \cong \Delta SHK \cong \Delta MNF \cong \Delta MLF \text{ (SAS 全等).}$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形 $AHKB$ 面積＝(ΔQSK 面積＋ΔOTA 面積)＋(ΔAPH 面積
＋ΔRKB 面積＋正方形 $OPQR$ 面積＋ΔTBA 面積＋ΔSHK 面積)
＝(ΔDEB 面積＋ΔCBE 面積)＋(ΔFCN 面積＋ΔGFL 面積
＋正方形 $ANML$ 面積＋ΔMNF 面積＋ΔMLF 面積)
＝正方形 $CBDE$ 面積＋正方形 $CAGF$ 面積

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍
Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner,15.
2. 心得：此圖形分割的結構很特別，作了許多的輔助線，且並不完全用到其它證明常用的平行線，而是利用了對角線的切割方法，非常適合讓學生來體驗拼圖操作的證明樂趣，拼圖過程中也多用到旋轉的方法，必須將元件之間的長度、角度的關係熟悉了才能拼湊更順暢。
＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●	●	●