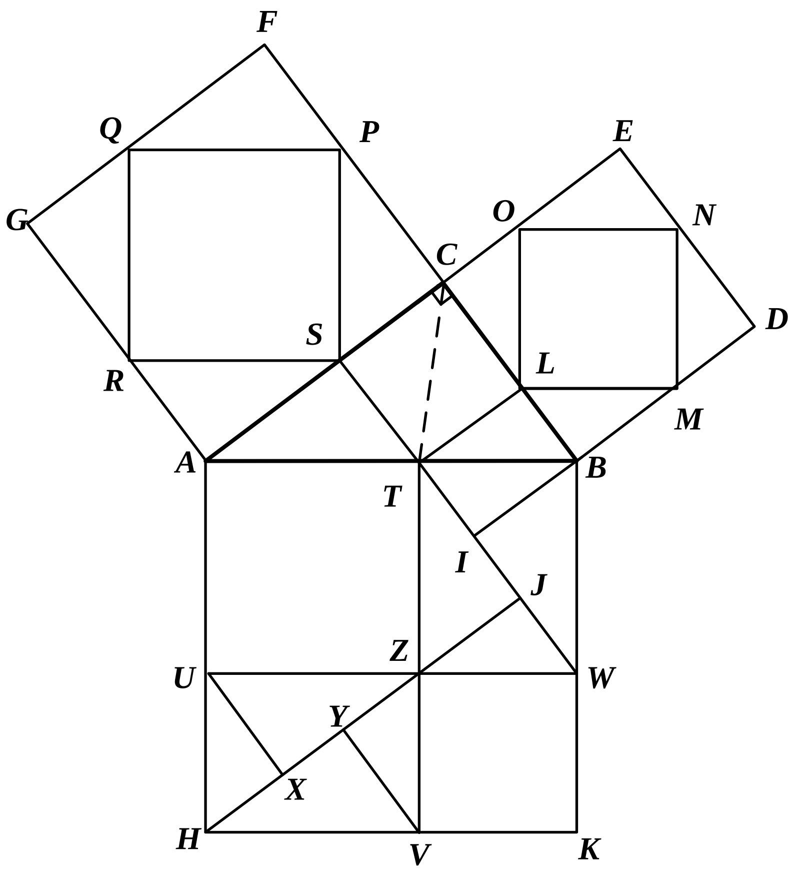
勾股定理證明-G027

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\angle ACB$之角平分線，交$\overline{AB}$於T點。
3. 從T點作$\overline{AH}$的平行線交$\overline{HK}$於V點，再從T點作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{AC}$於S點，從T點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{CB}$於L點。
4. 分別在$\overline{AG},\overline{GF},\overline{FC}$邊上取$R,Q,P$三點，使得$\overline{AR}=\overline{GQ}=\overline{FP}=\overline{CS}$，並連接$\overline{SR}$，$\overline{RQ},\overline{QP},\overline{PS}$。(在證明中說明四邊形$PQRS$為正方形)
5. 分別在$\overline{BD},\overline{DE},\overline{EC}$邊上取$M,N,O$三點，使得$\overline{BM}=\overline{DN}=\overline{EO}=\overline{CL}$，並連接$\overline{LM},\overline{MN},\overline{NO},\overline{OL}$。(在證明中說明四邊形$LMNO$為正方形)
6. 在$\overline{AH}$邊上取一點U，使得$\overline{AT}=\overline{AU}$，再從$U$點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{BK}$於$W$點，並交$\overline{TV}$於$Z$點。
7. 連接$\overline{TW},\overline{HZ}$。
8. 分別從U,V作$\overline{CB}$平行線交$\overline{HZ}$於X,Y兩點；再分別過B,Z作$\overline{CA}$平行線交$\overline{TW}$於I,J兩點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形 $AHKB$ 所切割的區塊，能拼合成正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 的區域，再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明四邊形 $CSTL$ 為正方形：

   因為 $\overline{CT}$ 為 $\angle ACB$ 之角平分線，又由作圖條件 $\overline{TS}$ 平行 $\overline{BC}$ ，且 $\overline{TL}$ 平行 $\overline{AC}$ ，得到四邊形 $CSTL$ 四角皆為直角且 $\overline{TS}=\overline{TL}$ ，因此四邊形 $CSTL$ 為正方形。

2. 證明四邊形 $PQRS$ 、四邊形 $LMNO$ 皆為正方形：

   因為 $\overline{CS}=\overline{AR}=\overline{GQ}=\overline{FP}$ ，所以可得到 $\overline{AS}=\overline{GR}=\overline{FQ}=\overline{CP}$ ，又正方形 $CAGF$ 四角皆為直角，因此

   $$\Delta RAS \cong \Delta QGR \cong \Delta PFQ \cong \Delta SCP \text{(SAS 全等)}.$$

   得到四邊形 $PQRS$ 四邊長皆相等，又

   $$\begin{aligned}\angle PSR &= 180^\circ - \angle ASR - \angle CSP \\ &= 180^\circ - \angle ASR - \angle ARS \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,\end{aligned}$$

得到四邊形 $PQRS$ 四角皆為直角，因此四邊形 $PQRS$ 為正方形。
同理可證四邊形 $LMNO$ 亦為正方形。

3. 由三角形 RAS 與三角形 TSA 全等，證明 $\overline{RS}$ 平行 $\overline{AT}$ 且 $\overline{RS}$ 與 $\overline{AT}$ 等長，同理可得 $\overline{LM}$ 平行 $\overline{TB}$ 且 $\overline{LM}$ 與 $\overline{TB}$ 等長：

因為 $\overline{AS}=\overline{SA}$ ，$\overline{AR}=\overline{CS}=\overline{ST}$ ，且 $\angle RAS=\angle TSA=90^\circ$，所以

$$\Delta RAS \cong \Delta TSA \text{(SAS 全等)}.$$

進一步得到 $\angle ASR=\angle SAT$ (內錯角相等)，因此

$$\overline{RS} // \overline{AT} \text{ 且 } \overline{RS} = \overline{AT}.$$

同理可證

$$\overline{LM} // \overline{TB} \text{ 且 } \overline{LM} = \overline{TB} \ .$$

4. 證明正方形 $PQRS$ 與正方形 $TAUZ$ 全等，正方形 $LMNO$ 與正方形 $VKWZ$ 全等：

因為 $\overline{RS} = \overline{AT}$ ，所以正方形 $PQRS$ 與正方形 $TAUZ$ 全等。

同理可證，因為 $\overline{LM}=\overline{TB}$ ，所以正方形 $LMNO$ 與正方形 $VKWZ$ 全等。

5. 證明正方形 $AHKB$ 內的兩組三角形之全等關係：

因為 $\overline{RS}=\overline{UZ}=\overline{HV}=\overline{TZ}=\overline{BW}$ ，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta RAS \cong \Delta UXZ \cong \Delta VYH \cong \Delta ZJT \cong \Delta BIW.$$

同理可證

$$\Delta LBM \cong \Delta TIB \cong \Delta WJZ \cong \Delta HXU \cong \Delta ZYV.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形 $AHKB$ 面積

＝正方形 $VKWZ$ 面積＋$4\times\Delta TIB$ 面積＋正方形 $TAUZ$ 面積＋$4\times\Delta UXZ$ 面積

=(正方形 $LMNO$ 面積＋$4\times\Delta LBM$ 面積)+(正方形 $PQRS$ 面積＋$4\times\Delta RAS$ 面積)

＝正方形 $CBDE$ 面積＋正方形 $CAGF$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這證明是由 J. Adams, Chassestreet 31, The Hague, Holland, 在 1933 年春天寄給 Loomis。
2. 心得：此證明的圖形分割很有創意，在正方形 $AHKB$ 內所切割的區塊共有十個，屬於較多切割數的，雖然拼圖過程中只要利用平移的拼圖技巧，就能得到正方形面積之間的畢氏定理關係，但對學生操作時的感受，是很有挑戰性的。
   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 說明：此題在魯米斯的書中所提的作圖方式其實是錯誤的，書中一開始作圖時提到“在 $\overline{AB}$ 邊上取 T 點，使得線段 $\overline{AT}$ 與 $\overline{BC}$ 等長”，其實真正的作圖方式是從 C 作 $\angle ACB$ 的角平分線，交於 $\overline{AB}$ 得到 T 點的位置才是。