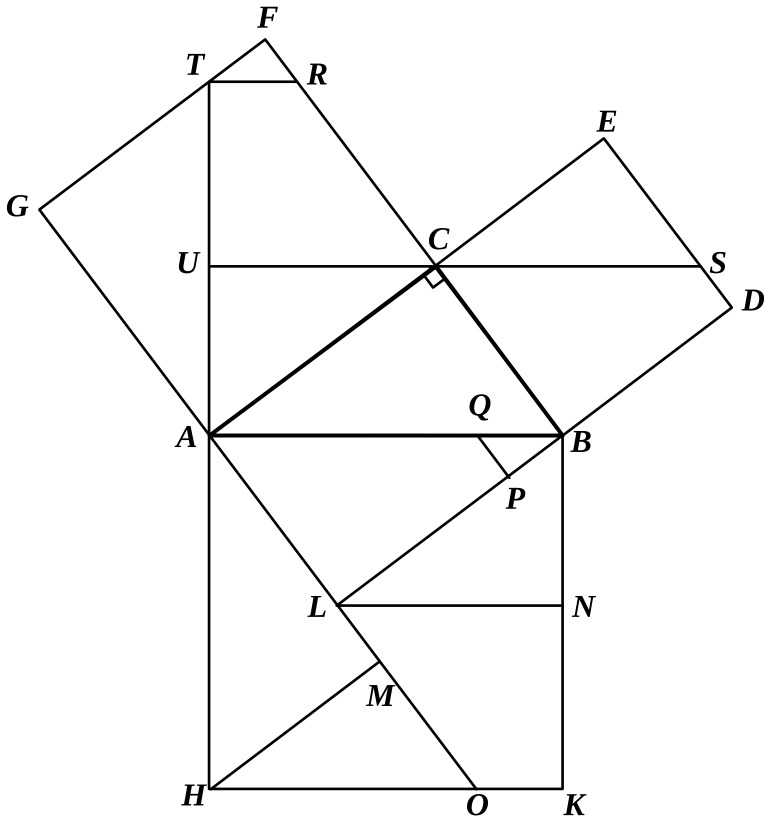
勾股定理證明-G026

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 延長$\overline{HA}$，交$\overline{GF}$於T點；延長$\overline{GA}$，交$\overline{HK}$於O點；延長$\overline{DB}$，交$\overline{AO}$於L點。
3. 從T點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{CF}$於R點，從C點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AT}$於U點，且交$\overline{ED}$於S點。
4. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{AO}$於M點，從L點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{BK}$於N點。
5. 在$\overline{BL}$上取一點P，使$\overline{PL}=\overline{BD}$，從$P$點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{AB}$於$Q$點。



【求證過程】

先分別證明輔助圖中所對應區塊之間的全等關係，再由正方形$AHKB$所切割的區塊，去拼合出正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域，由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 透過與三角形 ABC 全等的關係，證明三角形 AHM 與三角形 ATG 全等：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$，由平行關係得知 $\angle AMH=\angle ACB=90^\circ$，又

$\angle MAH=90^\circ-\angle BAL=\angle CAB$，所以

$$\Delta AHM\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}),$$

因為 $\overline{AG}=\overline{AC}$，又 $\angle GAT=90^\circ-\angle TAC=\angle CAB$，且 $\angle AGT=\angle ACB=90^\circ$，所以

$$\Delta ABC\cong\Delta ATG\ (\text{ASA 全等}).$$

因此

$$\Delta AHM\cong\Delta ABC\cong\Delta ATG.$$

2. 證明三角形 HMO 與三角形 CES 全等：

由 $\Delta AHM\cong\Delta ABC$ 可得到 $\overline{HM}=\overline{CB}=\overline{CE}$，由平行關係得知 $\angle MHO=\angle ECS$ 且

$\angle HMO=\angle CES=90^\circ$，所以

$$\Delta HMO\cong\Delta CES\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 證明四邊形 $ALPQ$ 與四邊形 $CBDS$ 全等：

因四邊形 $ACBL$ 為長方形，得到 $\overline{AL}=\overline{CB}$，又由條件 $\overline{PL}=\overline{BD}$ 及平行關係得到對應角相等，所以

$$\text{四邊形}ALPQ\cong\text{四邊形}CBDS.$$

4. 證明三角形 QPB 與三角形 RFT 全等，同理三角形 BLN 與三角形 ACU 全等：

已知 $\overline{PL}=\overline{BD}=\overline{BC}=\overline{GT}$ 且 $\overline{BL}=\overline{AC}=\overline{GF}$，因為 $\overline{BP}=\overline{BL}-\overline{PL}=\overline{GF}-\overline{GT}=\overline{TF}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta QPB\cong\Delta RFT\ (\text{ASA 全等}).$$

同理，因四邊形 $ACBL$ 為長方形，得到 $\overline{AC}=\overline{BL}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta BLN\cong\Delta ACU\ (\text{ASA 全等}).$$

5. 證明四邊形 $NLKO$ 與四邊形 $UCRT$ 全等：

因為 ΔBLN 與 ΔACU 全等，所以 $\overline{LN}=\overline{CU}$，又 $\overline{KN}=\overline{BK}-\overline{BN}=\overline{TA}-\overline{UA}=\overline{TU}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\text{四邊形}NLKO\cong\text{四邊形}UCRT.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$AHKB$面積＝(ΔHMO面積＋四邊形$ALPQ$面積)+(ΔAHM面積
＋ΔBLN面積＋四邊形$LNKO$面積＋ΔQPB面積)
＝(ΔCES面積＋四邊形$CBDS$面積)+(ΔATG面積
＋ΔACU面積＋四邊形$UCRT$面積＋ΔRFT面積)
＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 3 月 26 日想到的。
2. 心得：此證明圖形分割的元件與 G025、G127 只差別在將 G025、G127 最大的元件再作切割。而關於全等區塊間的證明，同樣利用了正方形直角與等邊長的特性，找出全等圖形的對應邊角相等關係，但與 G025 比起來，G026 的拼圖元件能在正方形 *AHKB* 內有更多的變化。此題證明圖形可以讓學生體驗拼圖操作的證明樂趣。

   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	