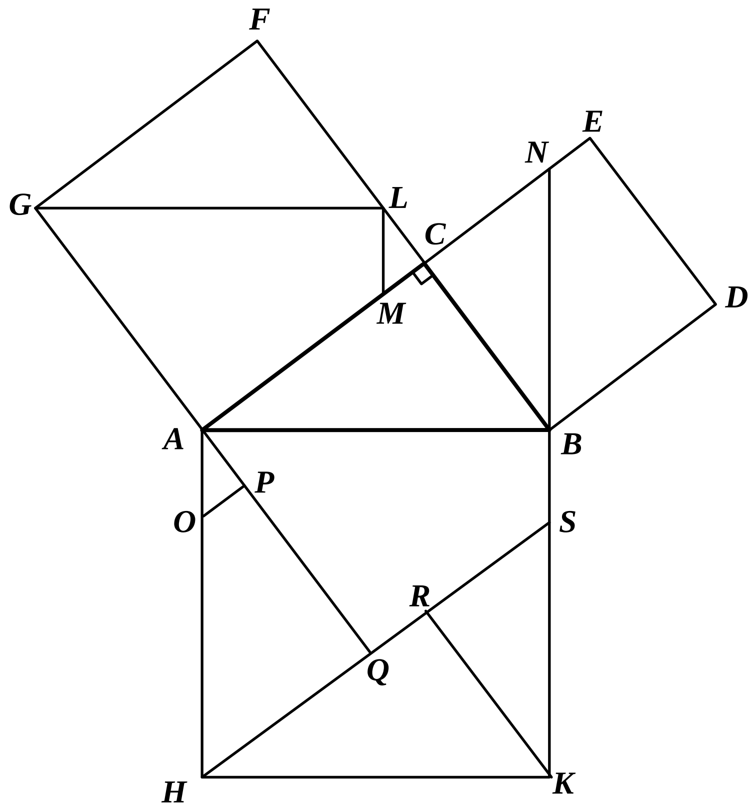
勾股定理證明-G025

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從G點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{CF}$於L點，從L點作$\overline{BK}$的平行線交$\overline{AC}$於M點。
3. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BK}$於S點，從K點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{HS}$於R點。
4. 延長$\overline{GA}$，交$\overline{HR}$於Q點。
5. 延長$\overline{KB}$，交$\overline{CE}$於N點。
6. 在$\overline{AQ}$上取一點P，使得$\overline{AP}=\overline{LC}$，再從$P$點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{AH}$於$O$點。



【求證過程】

先分別證明輔助圖中所對應區域間的全等關係，再由正方形$AHKB$所切割的區塊，能拼合成正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域，藉此得到面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 RHK 與三角形 FGL 全等：

因為 $\overline{GF}$ 平行且等長於 $\overline{AC}$ ，又 $\overline{GL}\,//\,\overline{AB}$ ，由平行關係得知， $\angle FGL=\angle CAB$ ，

$\angle GFL=\angle ACB=90^{\circ}$，所以 $\Delta FGL\cong\Delta CAB$ (ASA 全等)，同理 $\overline{HK}$ 平行且等長於 $\overline{AB}$，

由平行關係得知對應角相等，所以 $\Delta CAB\cong\Delta RHK$ (ASA 全等)，因此

$$\Delta FGL\cong\Delta CAB\cong\Delta RHK.$$

2. 證明三角形 KRS 與三角形 BCN 全等，且證明三角形 AOP 與三角形 LMC 全等：

由 $\Delta CAB\cong\Delta RHK$ 得到 $\overline{CB}=\overline{RK}$ ，又由平行關係得知 $\angle NCB=\angle SRK$ 且

$\angle NBC=\angle SKR$ ，所以

$$\Delta KRS\cong\Delta BCN \text{ (ASA 全等)}.$$

同理，因為條件 $\overline{AP}=\overline{LC}$ ，由平行關係得知 $\angle OAP=\angle MLC$ 且 $\angle APO=\angle LCM$ ，

所以

$$\Delta AOP\cong\Delta LMC \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 證明四邊形 $HOPQ$ 與四邊形 $BNED$ 全等，同理四邊形 $AQSB$ 與四邊形 $GAML$ 全等：

因為 $\overline{AH}=\overline{AB}$ ，且 $\angle HAQ=90^{\circ}-\angle BAQ=\angle BAC$ ，又 $\angle AQH=\angle ACB=90^{\circ}$ ，所以

$\Delta AHQ\cong\Delta ABC$ (AAS 全等)，得到 $\overline{AQ}=\overline{AC}=\overline{FC}$ ，且

$$\overline{HQ}=\overline{BC}=\overline{BD},$$

又因為

$$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=\overline{FC}-\overline{LC}=\overline{FL}=\overline{CB}=\overline{ED},$$

由平行關係得到對應角相等，因此

$$\text{四邊形}HOPQ\cong\text{四邊形}BNED,$$

同理，因為 $\overline{AB}=\overline{GL}$ ，且 $\overline{AQ}=\overline{AC}=\overline{GA}$ ，由平行關係得到對應角相等，因此

$$\text{四邊形}AQSB\cong\text{四邊形}GAML.$$

4. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$AHKB$面積

＝(ΔKRS面積＋四邊形$HOPQ$面積)+(ΔRHK面積＋ΔAOP面積＋四邊形$AQSB$面積)

＝(ΔBCN面積＋四邊形$BNED$面積)+(ΔFGL面積＋ΔLMC面積＋四邊形$GAML$面積)

＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積 .

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 38). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明圖形分割的元件與 G127 相同，利用了正方形直角的特性，找出互餘關係得到全等圖形的對應角相等，再搭配對應邊等長的關係得到全等圖形。最後只利用了平移的拼圖方法，得到了三個正方形面積之間的畢氏定理關係。此題證明圖形可以讓學生體驗了拼圖操作的證明樂趣。(此圖形分割的元件與 G026 有四塊相同)。

   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	