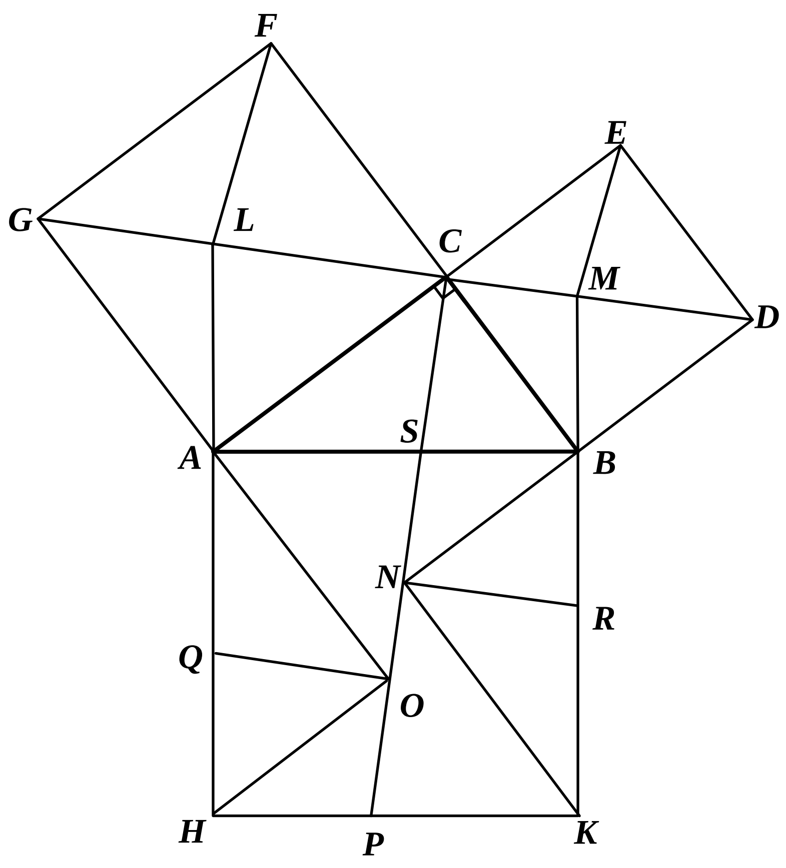
勾股定理證明-G024

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 連接$\overline{GC}$與$\overline{CD}$。
3. 延長$\overline{HA}$，交$\overline{GC}$於L點，並連接$\overline{LF}$。
4. 延長$\overline{KB}$，交$\overline{CD}$於M點，並連接$\overline{ME}$。
5. 作$\angle ACB$的角平分線$\overline{CP}$，且交$\overline{AB}$於S點。
6. 延長$\overline{GA}$，交$\overline{SP}$於O點，並連接$\overline{HO}$。
7. 延長$\overline{DB}$，交$\overline{SP}$於N點，並連接$\overline{KN}$。
8. 在$\overline{AH}$上取一點Q，使得$\overline{AQ}=\overline{AL}$，並連接$\overline{QO}$。
9. 在$\overline{BK}$上取一點R，使得$\overline{BR}=\overline{BM}$，並連接$\overline{RN}$。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形$CBDE$與正方形$CAGF$所切割出的區塊，能拼合成正方形$AHKB$的區域，再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 證明$G-C-D$共線：

   因為$\angle ACG=\angle BCD=45^{\circ}$，又$\angle ACB=90^{\circ}$，所以$G-C-D$共線。

2. 證明三角形AOC與三角形BCN都是等腰直角三角形：

   因為$\overline{CP}$為$\angle ACB$之角平分線，得到$\angle ACO=45^{\circ}$，又$\angle CAO=90^{\circ}$，所以ΔAOC為等腰直角三角形，同理ΔBCN也是等腰直角三角形。

3. 證明三角形GAL與三角形OAQ全等，同理三角形MBD與三角形RBN全等：

   因為ΔAOC為等腰直角三角形，得到$\overline{AG}=\overline{AC}=\overline{AO}$，由對頂角相等知

   $\angle GAL=\angle OAQ$，又已知條件$\overline{AL}$ ＝ $\overline{AQ}$，所以

   $$\Delta GAL\cong\Delta OAQ\ (\text{SAS 全等}).$$

   同理可證明

   $$\Delta MBD\cong\Delta RBN\ (\text{SAS 全等}).$$

4. 證明三角形MCB與三角形SNB全等，同理三角形LAC與三角形SAO全等：

   因為ΔBCN是等腰直角三角形，得到$\overline{BC}=\overline{BN}$，又$\angle MCB=\angle SNB=45^{\circ}$且

   $\angle CBM=90^{\circ}-\angle CBA=\angle NBS$，所以

   $$\Delta MCB\cong\Delta SNB\ (\text{ASA 全等}).$$

   同理可證明

   $$\Delta LAC\cong\Delta SAO\ (\text{ASA 全等}).$$

5. 證明三角形OAH與三角形NKB皆全等於三角形CAB：

   因為ΔAOC為等腰直角三角形，得到$\overline{AC}=\overline{AO}$，又$\angle CAB=90^{\circ}-\angle BAO=\angle OAH$且

   $\overline{AB}=\overline{AH}$，得到

   $$\Delta CAB\cong\Delta OAH\ (\text{SAS 全等}),$$

   同理可證明

   $$\Delta CAB\cong\Delta NK\ (\text{SAS 全等}).$$

6. 證明三角形OHP與三角形NBS全等，同理三角形PKN與三角形SAO全等：

   因為$\Delta CAB\cong\Delta OAH$，所以$\overline{HO}=\overline{BC}=\overline{BN}$，且$\angle AOH=\angle ACB=90^{\circ}$，得到

$\angle HOP = 180^\circ - \angle AOH - \angle COA = 45^\circ = \angle SNB$，又 $\overline{AB} // \overline{HK}$，得到 $\angle HPO = \angle BSN$，所以

$$\Delta OHP \cong \Delta NBS \text{ (AAS 全等)},$$

同理可證

$$\Delta PKN \cong \Delta SAO \text{ (AAS 全等)}.$$

7. 證明三角形 OQA 與三角形 NRK 全等，同理三角形 RBN 與三角形 QHO 全等：

   因為 $\Delta PKN \cong \Delta SAO$，所以 $\overline{AO} = \overline{KN}$， $\angle SAO = \angle PKN$，由垂直的互餘關係得到

   $\angle QAO = \angle RKN$，又 $\angle AOQ = \angle LGA = 45^\circ$， $\angle BNR = \angle MDB = 45^\circ$ (由證明過程 3.

   $\Delta GAL \cong \Delta OAQ$， $\Delta LAC \cong \Delta SAO$ 可知)，所以 $\angle KNR = 90^\circ - \angle BNR = 45^\circ = \angle AOQ$，

   得到

$$\Delta OQA \cong \Delta NRK \text{ (ASA 全等)} .$$

   同理可證

$$\Delta RBN \cong \Delta QHO \text{ (ASA 全等)} .$$

8. 整理所有全等關係：
   依照對稱性與全等圖形之間的切割關係，得到

$$\Delta CLF \cong \Delta CLA \cong \Delta OSA \cong \Delta NPK,$$
$$\Delta CME \cong \Delta CMB \cong \Delta NSB \cong \Delta OPH,$$
$$\Delta GLF \cong \Delta GLA \cong \Delta OQA \cong \Delta NRK,$$
$$\Delta MBD \cong \Delta MED \cong \Delta QHO \cong \Delta RBN.$$

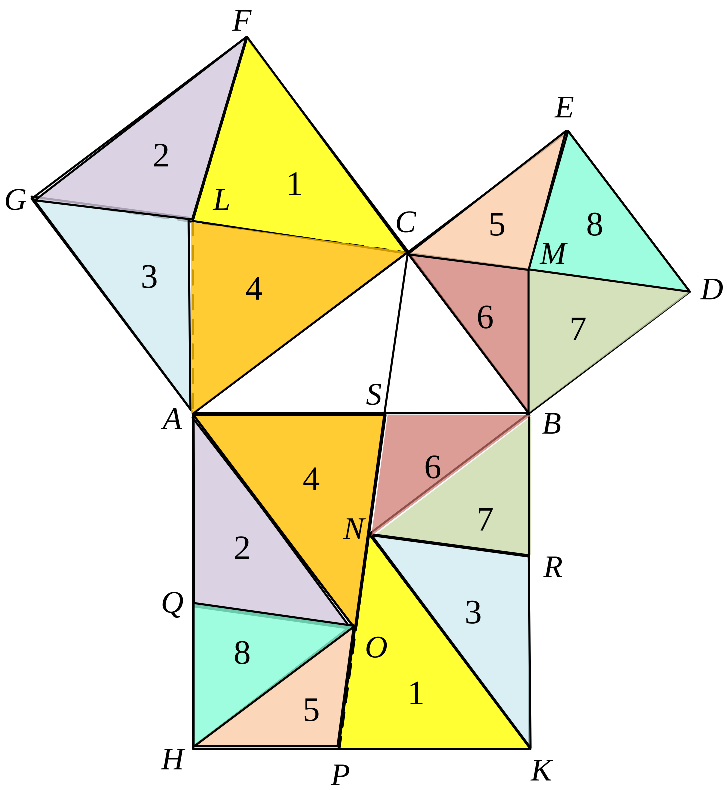
9. 將正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 內的區塊移至正方形 $AHKB$ 內：
   區塊 3 平移到正方形 $AHKB$ 內，

   區塊 4 順時針轉 90° 後平移到正方形 $AHKB$ 內，

   區塊 6 逆時針轉 90° 後平移到正方形 $AHKB$ 內，

   區塊 7 旋轉 180° 後平移到正方形 $AHKB$ 內，

   區塊 1,2,5,8 先翻轉再旋轉後移到正方形 $AHKB$ 內。



10. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形$ACKB$面積＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$ 面積

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p.44). Amsterdam: A. Versluys.
Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Dr. Leitzmann, 13.

2. 心得：此證明如同 G023 題，別出心裁先繪出了正方形對角線作為輔助線，再增加其它平行線段，學生只要細心的觀察，就能從眾多的三角形中，先看出滿足對邊平行的四邊形其對角線切割的三角形全等，再利用平行關係得到相等的角度，找出更多全等的圖形，共得到四組各四個三角形的全等結構，此題證明的過程稍微繁複。

＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
			●	●

4. 說明：此題作圖方法很特別的利用對角線與角平分線，與大部份利用延長線與平行線的畫法不同。此題圖形的作圖畫法雖與 G023 不同，但分割的元件數量與 G023 是相同且全等的，學生除了要利用平移與旋轉的拼圖技巧，還需要利用翻轉才能將兩個股所作的正方形內的元件，拼入斜邊所作的正方形，此題因為元件有八個之多，需要認真觀察圖形之間的角度關係。