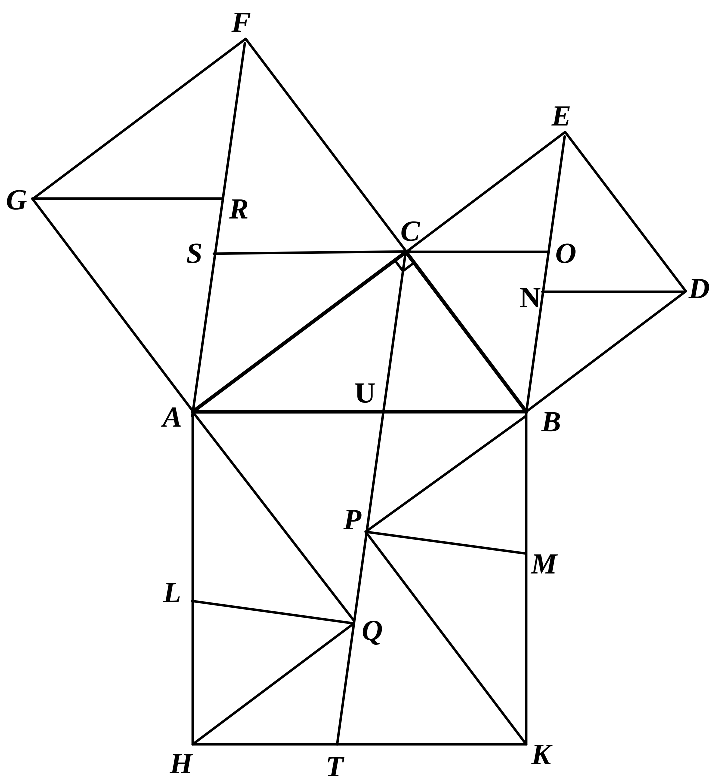
勾股定理證明-G023

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 連接$\overline{AF}$與$\overline{BE}$。
3. 分別從G作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AF}$於R點；從C點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AF}$於S點，且交$\overline{BE}$於O點；從D點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{BE}$於N點。
4. 從C點作$\overline{FA}$的平行線(即$\angle ACB$的角平分線)交$\overline{HK}$於T點，且交$\overline{AB}$於U點。
5. 從A點作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{UT}$於Q點，並連接$\overline{HQ}$。
6. 從B點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{UT}$於P點，並連接$\overline{KP}$。
7. 在$\overline{AH}$上取一點L，使得$\overline{AL}=\overline{SC}$，並連接$\overline{LQ}$。
8. 在$\overline{BK}$上取一點M，使得$\overline{BM}=\overline{CO}$，並連接$\overline{PM}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，先證明正方形 $CBDE$ 與正方形 $CAGF$ 所切割出的區塊，能拼合成正方形 $AHKB$ 的區域，再由面積相等的關係，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 首先證明 $\overline{AF}$ 與 $\overline{BE}$ 平行：

   由作圖 2.知 $\overline{AF}$ 與 $\overline{BE}$ 皆為正方形的對角線，所以 $\angle FAC = \angle CEB = 45^{\circ}$，得到

$$\overline{AF} // \overline{BE}.$$

2. 證明直角三角形 ABC 內的三角形 ACU 與三角形 CAS 全等，且三角形 CBU 與三角形 BCO 全等：

   由作圖 3. 4. 知 $\overline{AF} // \overline{CT} // \overline{BE}$，且 $\overline{SO} // \overline{AB}$，得到四邊形 $AUCS$ 與四邊形 $CUBO$ 皆為平行四邊形，因此

$$\Delta ACU \cong \Delta CAS,$$

   且

$$\Delta CBU \cong \Delta BCO.$$

3. 證明三角形 GFR 與三角形 CAS 全等，且三角形 GAR 與三角形 CFS 全等，同理可推得三角形 DNE 與三角形 COB 全等，三角形 DNB 與三角形 COE 全等：

   因為 $\overline{GF} = \overline{CA}$ 且 $\overline{GF} // \overline{CA}$，再加上平行關係 $\overline{GR} // \overline{CS}$，得到 $\angle FGR = \angle ACS$，又

   $\angle GFR = \angle CAS = 45^{\circ}$，所以

$$\Delta GFR \cong \Delta CAS \text{ (ASA 全等)}.$$

   因為 $\overline{GA} = \overline{CF}$，$\angle GAR = \angle CFS = 45^{\circ}$ 且由平行關係 $\overline{GR} // \overline{CS}$，得到 $\angle GRA = \angle CSR$，可證得

$$\Delta GAR \cong \Delta CFS (AAS\text{全等}),$$

   同理可證得正方形 CBDE 中

$$\Delta DNE \cong \Delta COB, \Delta DNB \cong \Delta COE.$$

4. 證明三角形 GAR 與三角形 AQU 全等且三角形 DNB 與三角形 BUP 全等：(平移之後全等)

   因為 $\overline{CT} // \overline{FA}$，得到 $\angle ACQ = \angle FAC = 45^{\circ}$，又 $\overline{AQ} // \overline{CB}$，得到 $\angle CAQ = \angle ACB = 90^{\circ}$，所以可知 ΔAQC 為等腰直角三角形，進一步得到

   $\overline{AQ} = \overline{AC} = \overline{AG}, \angle AQU = 45^{\circ} = \angle GAR$，再由 $\overline{GR} // \overline{AB}$ 得到 $\angle UAQ = \angle RGA$，

   因此

$$\Delta GAR \cong \Delta AQU \text{ (ASA 全等)}.$$

同理可證得

$$\Delta DNB \cong \Delta BUP \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 證明三角形 ALQ 與三角形 CSA 全等且三角形 BPM 與三角形 CBO 全等：

因為 $\angle LAQ = 90^\circ - \angle UAQ = \angle UAC = \angle SCA$，且 $\overline{AQ} = \overline{CA}$，再由條件 $\overline{AL} = \overline{SC}$

得到

$$\Delta ALQ \cong \Delta CSA \text{ (SAS 全等)},$$

同理可證得

$$\Delta BPM \cong \Delta CBO \text{ (SAS 全等)}.$$

6. 證明三角形 QLH 與三角形 CUB 全等且三角形 PMK 與三角形 CAU 全等：

已得證 $\overline{AQ} = \overline{AC}$，又 $\overline{AH} = \overline{AB}$ 與 $\angle QAH = \angle CAB$，得到

$$\Delta QAH \cong \Delta CAB \text{（SAS 全等）},$$

所以 $\overline{HQ} = \overline{BC}$, $\angle AHQ = \angle ABC$，又因 $\overline{LH} = \overline{AH} - \overline{AL} = \overline{AB} - \overline{CS} = \overline{AB} - \overline{AU} = \overline{BU}$，

所以

$$\Delta QLH \cong \Delta CUB \text{ (SAS 全等)}.$$

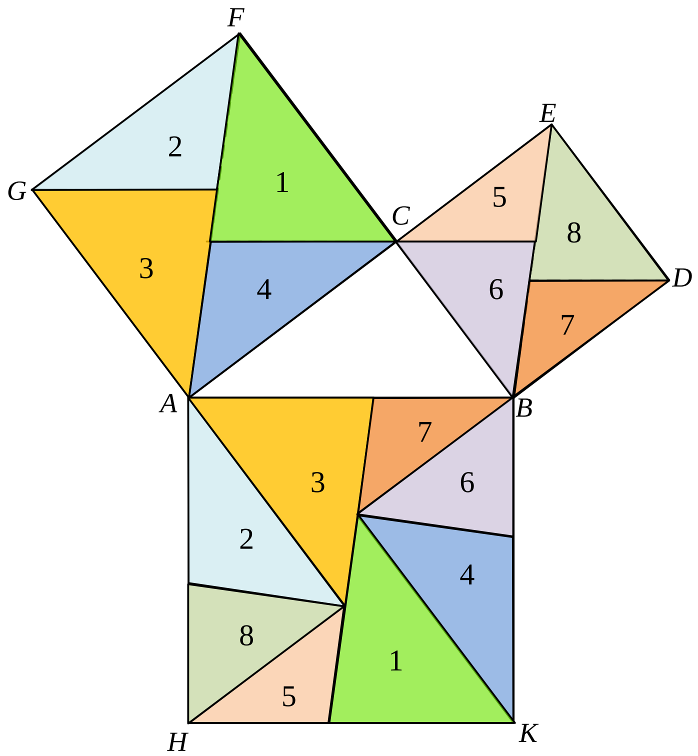
同理可證得

$$\Delta PMK \cong \Delta CUA \text{ (SAS 全等)}.$$

7. 證明三角形 QHT 與三角形 ECO 全等，且三角形 PKT 與三角形 FCS 全等：

因為 $\overline{QH}$ 平行且等長於 $\overline{EC}$，仿前面的概念由平行關係得到對應角相等，所以 $\Delta QHT \cong \Delta ECO$ (ASA 全等)，同理可證得，$\Delta PKT \cong \Delta FCS$ (ASA 全等)．

8. 如下圖，將區塊 1,3,5,7,平移到正方形 $AHKB$ 內，區塊 2,4,6,8 順時針轉 90° 後平移到正方形 $AHKB$ 內。



9. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

正方形 *AHKB* 面積＝正方形 *CBDE* 面積＋正方形 *CAGF* 面積

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 45). Amsterdam: A. Versluys.

   Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Leitzmann, 13.

2. 心得：此證明別出心裁先繪出了正方形的對角線作為輔助線，再增加其它平行線段，有別於其它證明皆使用平行線。學生只要細心的觀察，就能從眾多的三角形中，利用平行關係得到相等的對應角，看出滿足全等關係的三角形，共得到四組各四個三角形的全等結構。但此題的證明過程因元件太多，故稍嫌繁複，只適合以拼圖方式來體驗，不適合作為證明的教材。

   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
			●	●

4. 說明：此題作圖方法很特別的使用對角線與角平分線，與大部份利用延長線與平行線的畫法不同。此題圖形的作圖畫法雖與 G024 不同，但分割的元件數量與 G024 是相同且全等的，學生只要利用平移與旋轉的拼圖技巧，即可將兩個股所作的正方形拼入斜邊所作的正方形，但此題因為元件有八個之多，需要認真觀察。