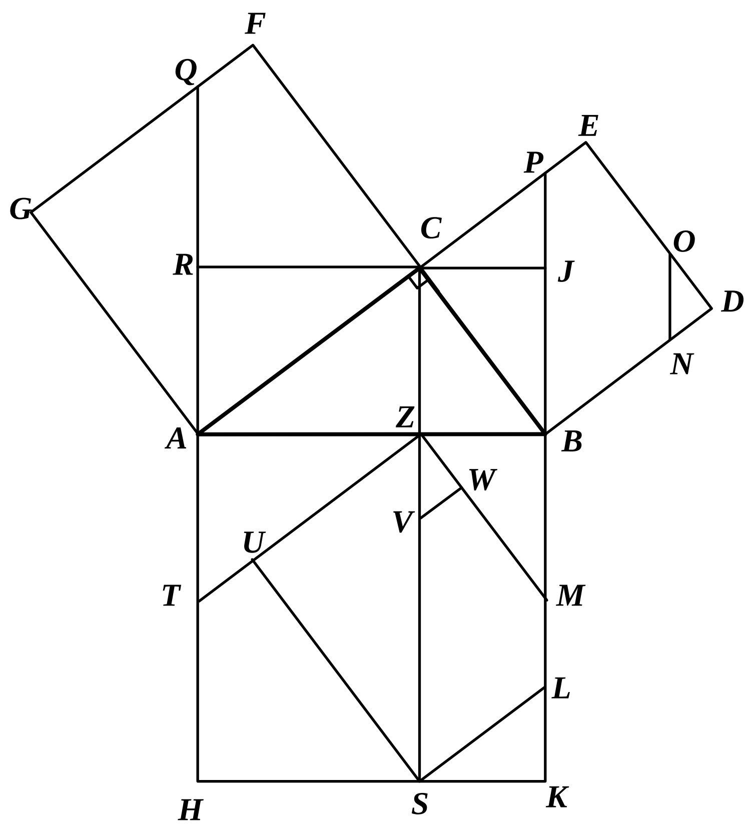
勾股定理證明-G022

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交於S點，且交$\overline{AB}$於Z點。
3. 延長$\overline{HA}$交$\overline{GF}$於Q點，延長$\overline{KB}$交$\overline{CE}$於P點。
4. 從Z點作$\overline{CA}$的平行線交$\overline{AH}$於T點，作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{BK}$於M點。
5. 從S點作$\overline{BC}$的平行線交$\overline{ZT}$於U點，作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BK}$於L點。
6. 在$\overline{ZS}$上取一點V，使得$\overline{SV}=\overline{BP}$，並從$V$點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{ZM}$於$W$點。
7. 在$\overline{ED}$上取一點O，使得$\overline{EO}=\overline{WM}$，並從$O$點作$\overline{BP}$的平行線交$\overline{BD}$於$N$點。
8. 從C點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{AQ}$於R點，且交$\overline{BP}$於J點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，證明正方形 $AHKB$ 所切割出的區塊中，長方形 $BKSZ$ 內的區塊可以拼出正方形 $CBDE$ 的區域，同時長方形 $AHSZ$ 內的區塊可以拼出正方形 $CAGF$ 的區域，證明了長方形 $BKSZ$ 的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積，同時長方形 $AHSZ$ 的面積也與正方形 $CAGF$ 的面積相等，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 首先觀察出四邊形 $ATZC$ 與四邊形 $BMZC$ 皆為平行四邊形：

   由作圖得到 $\overline{CS}\,//\,\overline{AH}\,//\,\overline{BK}$ ，$\overline{ZT}\,//\,\overline{CA}$ 且 $\overline{ZM}\,//\,\overline{CB}$ ，所以四邊形 $ATZC$ 與四邊形 $BMZC$ 皆為平行四邊形。

2. 由平行四邊形 $BMZC$ 所得到的長度與平行關係，證明三角形 ZMB 與三角形 CBJ 全等：

   (由於求證過程 3.之後的三角形全等證明過程，其判斷全等的概念與求證過程 2.相同，故有關一對平行且等長的線段，若其另兩邊亦成平行關係，就省略說明對應角的內容)

   因為四邊形 $BMZC$ 為平行四邊形，可得到 $\overline{ZM}\,//\,\overline{CB}$ 且 $\overline{ZM}=\overline{CB}$ ，由平行關係可得同位角相等

   $$\angle ZMB=\angle CBJ,$$

   又由平行關係 $\overline{ZB}\,//\,\overline{CJ}$ 可得到

   $$\angle BZM=\angle JCB,$$

   所以

   $$\Delta ZMB\cong\Delta CBJ\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 由平行四邊形 $ATZC$ 所得到的長度與平行關係，證明三角形 ATZ 與三角形 RAC 全等：

   因為四邊形 $ATZC$ 為平行四邊形，可得到 $\overline{ZT}\,//\,\overline{CA}$ 且 $\overline{ZT}=\overline{CA}$，由平行關係 $\overline{ZA}\,//\,\overline{CR}$ 可得到對應角相等，所以

   $$\Delta ATZ\cong\Delta RAC\ (\text{ASA 全等}).$$

4. 先證明 $\overline{AQ}=\overline{SZ}$ ，再證明三角形 USZ 與三角形 GAQ 全等：

   因為 $\overline{AG}=\overline{AC}$, $\angle QGA=\angle BCA=90^{\circ}$ 且由垂直的互餘關係得到

   $$\angle GAQ=90^{\circ}-\angle QAC=\angle CAB,$$

   所以

   $$\Delta GAQ\cong\Delta CAB\ (\text{ASA 全等}).$$

進一步得到$\overline{AB}=\overline{AQ}=\overline{SZ}$，在三角形$USZ$與三角形$GAQ$中，因為

$$\overline{AQ}=\overline{SZ}\text{ 且 }\overline{AQ}\,//\,\overline{SZ},$$

由平行關係得到對應角相等(同證明過程 2.)，所以

$$\Delta USZ\cong\Delta GAQ\,(\text{ASA 全等}).$$

5. 證明四邊形$THSU$與四邊形$QRCF$全等：

由上述ΔUSZ與ΔGAQ全等的證明結果，可得到$\overline{US}=\overline{GA}$，又$\overline{GA}=\overline{FC}$，所以

$$\overline{US}=\overline{FC}$$

且由$\overline{GF}=\overline{AC}=\overline{TZ}$與$\overline{GQ}=\overline{UZ}$的條件，可得到

$$\overline{GF}-\overline{GQ}=\overline{TZ}-\overline{UZ},$$

整理得

$$\overline{QF}=\overline{TU}\text{ ，}$$

又因為四邊形$HSCR$為長方形，得到$\overline{HS}=\overline{RC}$，再由平行關係得到對應角相等，所以

$$\text{四邊形}THSU\cong\text{四邊形}QRCF.$$

6. 證明三角形SKL與三角形CJP全等：

因為四邊形$SKJC$為長方形，得到$\overline{SK}=\overline{CJ}$，且由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta SKL\cong\Delta CJP\,(\text{ASA 全等}).$$

7. 證明三角形ZVW與三角形OND全等：

由作圖 7.知$\overline{EO}=\overline{WM}$且$\overline{ED}=\overline{CB}=\overline{ZM}$，所以

$$\overline{ZM}-\overline{WM}=\overline{ED}-\overline{EO},$$

得到

$$\overline{ZW}=\overline{OD}.$$

由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta ZVW\cong\Delta OND\,(\text{ASA 全等}).$$

8. 由以下附圖先證明三角形ZSY與三角形XBD全等，再證明五邊形$SLMWV$與五邊形$BNOEP$全等：

(1) 延長$\overline{DE}$與$\overline{BP}$交於X點，延長$\overline{ZM}$與$\overline{SL}$於Y點，已知$\overline{BC}=\overline{BD}$,

$\angle CBA = 90^\circ - \angle CBX = \angle DBX$ 且 $\angle BCA = \angle BDX = 90^\circ$，所以

$$\Delta ABC \cong \Delta XBD\,(\text{ASA 全等}),$$

進而得到

$$\overline{AB} = \overline{BX}\ .$$

又由 $\overline{AB} = \overline{ZS} = \overline{BX}$ ，且由平行關係得到對應角相等(同證明過程 2.)，所以

$$\Delta ZSY \cong \Delta XBD\,(\text{ASA 全等}),$$

進而得到

$$\Delta ABC \cong \Delta XBD \cong \Delta ZSY\ .$$

(2) 已知 $\overline{EO} = \overline{WM}$ ，又 $\overline{XD} = \overline{AC} = \overline{ZY}$ 且 $\overline{ED} = \overline{CB} = \overline{ZM}$ ，得到

$$\overline{XD} - \overline{ED} = \overline{ZY} - \overline{ZM},$$

$$\overline{XE} = \overline{MY}\ ,$$

再由平行關係得到

$$\Delta XPE \cong \Delta MLY\ ,$$

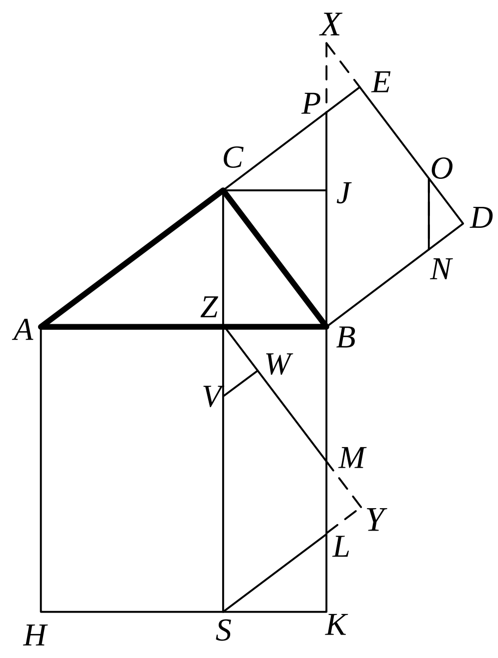
又 $\overline{ZV} = \overline{ZS} - \overline{SV} = \overline{BX} - \overline{BP} = \overline{XP}$ ，由平行關係得到 $\Delta ZVW \cong \Delta XPE$,

且 $\Delta ZVW \cong \Delta OND$ ，所以可得

$$\Delta ZVW \cong \Delta XPE \cong \Delta OND \cong \Delta MLY\ ,$$

進而得到

$$\text{五邊形}SLMWV \cong \text{五邊形}BNOEP.$$



9. 將上述全等的關係整理，得到長方形 $BKSZ$ 面積等於正方形 $CBDE$ 面積，且長方形 $AHSZ$ 面積等於正方形 $CAGF$ 面積：

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}BKSZ\text{ 面積} &= \Delta SKL\text{ 面積}+\Delta MBZ\text{ 面積}+\Delta ZVW\text{ 面積}+\text{五邊形}SLMWV\text{ 面積} \\
&= \Delta CJP\text{ 面積}+\Delta BJC\text{ 面積}+\Delta OND\text{ 面積}+\text{五邊形}BNOEP\text{ 面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\text{長方形}AHSZ\text{面積} &= \Delta ATZ\text{ 面積}+\Delta USZ\text{ 面積}+\text{四邊形}THSU\text{ 面積} \\
&= \Delta RAC\text{ 面積}+\Delta GAQ\text{ 面積}+\text{四邊形}QRCF\text{ 面積} \\
&= \text{正方形}CAGF\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

10. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}AHKB\text{面積} &= \text{長方形}BKSZ\text{ 面積}+\text{長方形}AHSZ\text{ 面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 43). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：此題圖形繪製的輔助線稍多，都是繪製平行的輔助線，能使學生較容易看出對應角的相等關係，再利用平行四邊形的對邊等長的關係，判斷出三角形之間的全等性質。
   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
			●	

4. 說明：此題圖形的作圖畫法雖與 G021 不同，但分割的元件數量與 G021 是相同且全等的，學生只要利用平移的拼圖方法，即可得到了三個正方形面積之間的畢氏定理關係，拼圖方式比 G021 利用平移與旋轉的拼圖方法來得輕鬆。