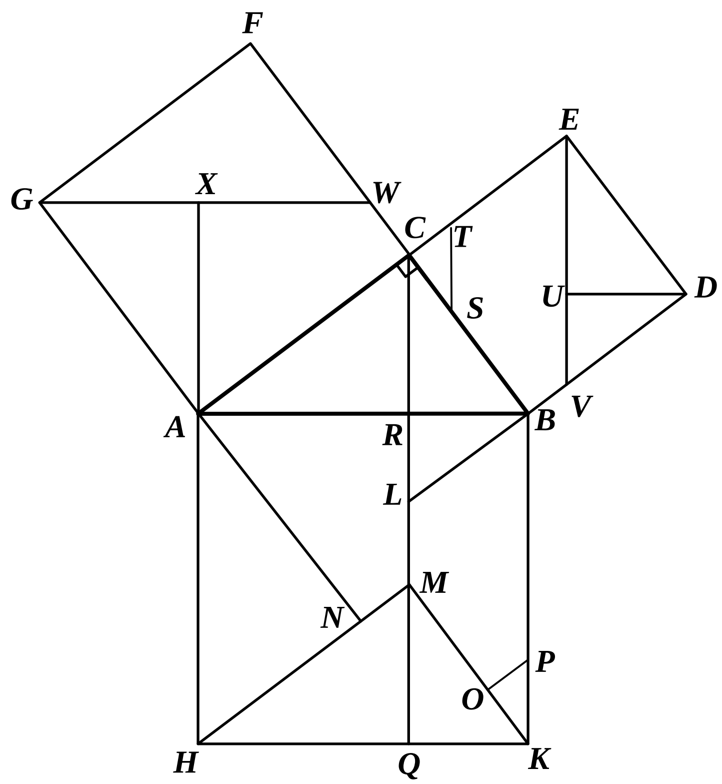
勾股定理證明-G021

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向外作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向外作一正方形$CAGF$。
2. 從C點作$\overline{HK}$的垂線交$\overline{HK}$於Q點，並交$\overline{AB}$於R點。
3. 從H點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{CQ}$於M點，連接$\overline{KM}$。
4. 從G點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{CF}$於W點，延長$\overline{HA}$與$\overline{GW}$交於X點。
5. 從E點作$\overline{CQ}$的平行線交$\overline{BD}$於V點，從D點作$\overline{AB}$的平行線交$\overline{EV}$於U點。
6. 延長$\overline{DB}$與$\overline{CQ}$交於L點；延長$\overline{GA}$與$\overline{HM}$交於N點。
7. 在$\overline{BK}$上取P點，使得$\overline{PK}=\overline{LM}$，並且從$P$點作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{MK}$於$O$點。
8. 在$\overline{CE}$上取T點，使得$\overline{TE}=\overline{BL}$，從$T$點作$\overline{CR}$的平行線交$\overline{CB}$於$S$點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別向外作三個正方形，證明正方形 $AHKB$ 所切割出的區塊中，長方形 $BKQR$ 內的區塊可以拼出正方形 $CBDE$ 的區域，同時長方形 $AHQR$ 內的區塊可以拼出正方形 $CAGF$ 的區域，證明了長方形 $BKQR$ 的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積，同時長方形 $AHQR$ 的面積也與正方形 $CAGF$ 的面積相等，最後推出畢氏定理的關係式。

1. 首先證明四邊形 $BKMC$ 為平行四邊形：

由作圖 2.3.知四邊形 $AHMC$ 為平行四邊形，所以 $\overline{CM}=\overline{AH}$ ，又 $\overline{AH}=\overline{BK}$ ，得到

$$\overline{CM}=\overline{BK} \text{ 且 } \overline{CM}\,//\,\overline{BK},$$

因此四邊形 $BKMC$ 為平行四邊形。

2. 由平行四邊形 $BKMC$ 所得到的長度關係，證明三角形 MQK 與三角形 EUD 全等：

因為四邊形 $BKMC$ 為平行四邊形，得到對邊 $\overline{MK}$ 與 $\overline{CB}$ 平行且等長，可得知

$\overline{MK}=\overline{CB}=\overline{ED}$ 且 $\overline{MK}\,//\,\overline{CB}\,//\,\overline{ED}$ ，由平行的關係(作圖 3.5.)得到對應角

$\angle KMQ=\angle DEU$ 且 $\angle MKQ=\angle EDU$ ，所以

$$\Delta MQK\cong\Delta EUD \text{ (ASA 全等).}$$

3. 利用與三角形 ARC 的全等關係，證明三角形 HQM 與三角形 AXG 全等：

因為 $\overline{HM}=\overline{AC}=\overline{AG}$ ，且 $\overline{AC}\,//\,\overline{HM}$, $\overline{AB}\,//\,\overline{HK}$ 可得到 $\angle MHQ=\angle CAR$ ，又

$\angle GAX=90^\circ-\angle XAC=\angle CAR$ ，所以 $\angle MHQ=\angle CAR=\angle GAX$ ，又

$\angle MQH=\angle CRA=\angle GXA=90^\circ$ ，所以

$$\Delta HQM\cong\Delta ARC\cong\Delta AXG \text{ (AAS 全等).}$$

4. 利用與三角形 CAB 的全等關係，證明三角形 NAH 與三角形 FGW 全等：

先證明三角形 FGW 與三角形 CAB 全等：

由作圖 4.知 $\overline{GW}\,//\,\overline{AB}$ ，又 $\overline{GA}\,//\,\overline{WB}$ ，得到四邊形 $GABW$ 為平行四邊形，所以

$\overline{GW}=\overline{AB}$，又因平行關係(同第 3 點證明)，所以 $\angle FGW=\angle CAB$ 且 $\angle FWG=\angle CBA$，得到

$$\Delta FGW\cong\Delta CAB \text{ (ASA 全等).}$$

再證明三角形 CAB 與三角形 NAH 全等：

由垂直的互餘關係得到 $\angle NAH=90^\circ-\angle BAN=\angle CAB$ ，且由 $\overline{AC}\,//\,\overline{HM}$ 的平行關係

得到$\angle ANH = 90^\circ = \angle ACB$，又$\overline{AH} = \overline{AB}$，得到

$$\Delta CAB \cong NAH \text{ (AAS 全等)},$$

所以

$$\Delta NAH \cong \Delta FGW.$$

5. 證明四邊形$ANMR$與四邊形$ACWX$全等：

由上述全等證明得到$\overline{AR} = \overline{AX}$ (因為$\Delta ARC \cong \Delta AXG$)，$\overline{AN} = \overline{AC}$ (因為$\Delta CAB \cong \Delta NAH$)，又$\overline{HM} = \overline{AC} = \overline{CF}$，且$\overline{HN} = \overline{WF}$ (因為$\Delta NAH \cong \Delta FGW$)，所以$\overline{NM} = \overline{HM} - \overline{HN} = \overline{CF} - \overline{WF} = \overline{CW}$，再由垂直的互餘關係得到$\angle XAC = \angle RAN$，且$\angle ANM = \angle ACW = 90^\circ$，所以

$$\text{四邊形}ANMR \cong \text{四邊形}ACWX.$$

6. 證明三角形RLB與三角形UVD全等：

因為$\overline{LV} = \overline{CE} = \overline{BD}$，得到

$$\begin{aligned}\overline{LB} &= \overline{LV} - \overline{BV} \\ &= \overline{CE} - \overline{BV} \\ &= \overline{BD} - \overline{BV} \\ &= \overline{VD}\end{aligned}$$

且由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta RLB \cong \Delta UVD \text{ (ASA 全等)}.$$

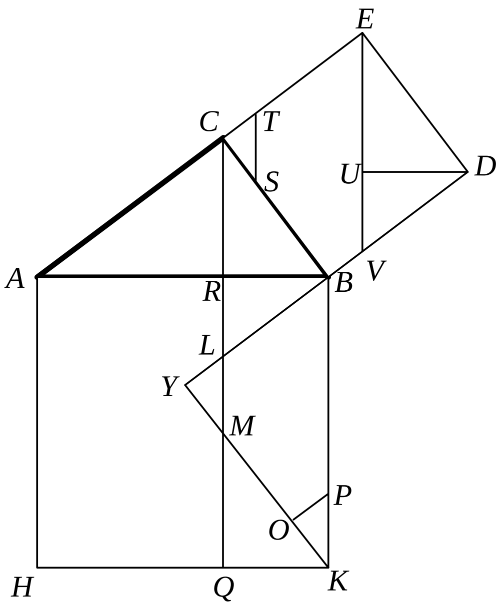
7. 證明三角形POK與三角形TCS全等：

如下圖所示，延長$\overline{DB}$與$\overline{KM}$交於Y點，因為$\overline{LM} = \overline{PK}$，由平行關係得到對應角相等，所以$\Delta POK \cong \Delta LYM$ (ASA 全等)，又$\overline{BK} = \overline{AB}$，且由平行關係與垂直的互餘關係可得到$\angle BYK = \angle BCA = 90^\circ$，$\angle CBA = \angle YBK$，所以$\Delta BYK \cong \Delta BCA$ (AAS 全等)，由等長關係$\overline{TE} = \overline{BL}, \overline{YL} = \overline{OP}$與$\overline{CE} = \overline{BC} = \overline{BY}$，進一步得到

$$\overline{CT} = \overline{CE} - \overline{TE} = \overline{BY} - \overline{BL} = \overline{YL} = \overline{OP},$$

再由平行關係得到對應角相等可知

$$\Delta TCS \cong \Delta POK \text{ (ASA 全等)}.$$



8. 證明五邊形 $LMOPB$ 與五邊形 $TSBVE$ 全等：

因為 $\overline{TE}=\overline{BL}$, $\overline{TS}=\overline{LM}$, $\overline{SB}=\overline{CB}-\overline{CS}=\overline{MK}-\overline{OK}=\overline{MO}$,

$\overline{BV}=\overline{LV}-\overline{LB}=\overline{CE}-\overline{TE}=\overline{CT}=\overline{OP}$,

$\overline{EV}=\overline{EU}+\overline{UV}=\overline{MQ}+\overline{RL}=\overline{RQ}-\overline{LM}=\overline{BK}-\overline{PK}=\overline{BP}$ ，再由平行關係得到對應角相等，進一步證出

$$\text{五邊形}LMOPB \cong \text{五邊形}TSBVE.$$

9. 將上述全等的關係整理，得到長方形 $BKQR$ 面積等於正方形 $CBDE$ 面積，且長方形 $AHQR$ 面積等於正方形 $CAGF$ 面積：

長方形 $BKQR$ 面積

＝ΔMQK 面積＋ΔPOK 面積＋五邊形 $LMOPB$ 面積＋ΔRLB 面積

＝ΔEUD 面積＋ΔTCS 面積＋五邊形 $TSBVE$ 面積＋ΔUVD 面積

＝正方形 $CBDE$ 面積.

且

長方形 $AHQR$ 面積

＝ΔNAH 面積＋ΔHQM 面積＋四邊形 $ANMR$ 面積

＝ΔFGW 面積＋ΔAXG 面積＋四邊形 $ACWX$ 面積

＝正方形 $CAGF$ 面積.

10. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

$$\text{正方形}AHKB\text{面積}=\text{長方形}BKQR\text{面積}+\text{長方形}AHQR\text{面積}$$
$$=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}CAGF\text{面積}.$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 9 日想到的。之後在以下的書籍中也找到證明：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 42). Amsterdam: A. Versluys.

   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 28). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明輔助線雖多，但繪圖過程皆與平行有關，使學生較容易看出對應角的相等關係，再加上平行四邊形的對邊長相等關係，更能順利判斷三角形之間的全等性質。學生需要利用平移與旋轉的拼圖方法，來得到了三個正方形面積之間的畢氏定理關係，比 G022 的平移拼法更有挑戰性。此證明圖形可以讓學生體驗了拼圖操作的證明樂趣。

   ＜此題圖形的分割方式適合作為拼圖證明的教材＞

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
			●	

4. 說明：(1).證明過程第 3 點的證明概念為：由平行得到同位角相等與利用垂直的互餘關係得到角度相等。由於此證明方法常出現，因此之後出現類似概念，證明將不再詳述。

   (2).證明過程第 5 點證明四邊形全等的概念為：利用所知條件，連接對角線並透過兩組三角形的全等證明，得到所有的對應邊及對應角均相等，進而證出兩四邊形全等，由於此證明方法亦常出現，因此之後出現類似概念，證明將不再詳述。

   (3).此題圖形的作圖畫法雖與 G022 不同，但分割的元件數量與 G022 是相同且全等的，此題需要利用平移與旋轉的拼圖方法，來得到了三個正方形面積之間的畢氏定理關係，比 G022 的平移拼法更有挑戰性。