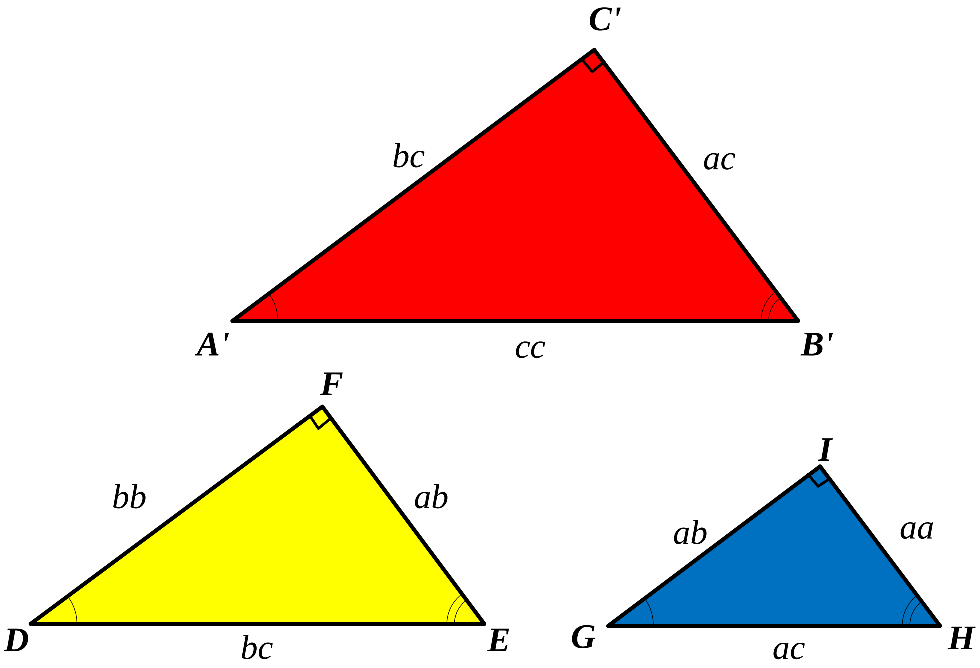
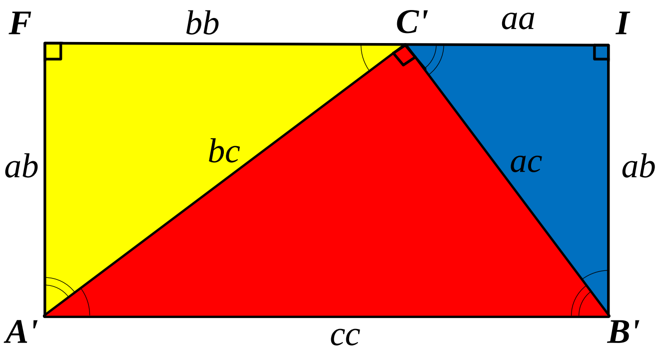
勾股定理證明-Bog041

【作輔助圖】

1. 將三角形ABC分別放大c，b，a倍，產生新的三角形$A'B'C'$、三角形DEF、三角形GHI，如＜圖一＞。
2. 將三角形DEF的$\overline{DE}$和三角形$A'B'C'$的$\overline{A'C'}$重疊，並讓D點在C'點上、E點在A'點上；將三角形GHI的$\overline{GH}$和三角形$A'B'C'$的$\overline{B'C'}$重疊，並讓G點在B'點上、H點在C'點上，形成五邊形$A'B'IC'F$，如＜圖二＞。



＜圖一＞



＜圖二＞

【求證過程】

將直角三角形 ABC 放大，形成三個皆相似的直角三角形，並將三角形拼湊成多邊形，先說明此多邊形為矩形，再利用矩形對邊等長的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明五邊形 $A'B'IC'F$ 為矩形：

   因為 $\angle A'C'F+\angle A'C'B'+\angle B'C'I=\angle C'A'B'+\angle A'C'B'+\angle A'B'C'=180^\circ$，所以

   $$F-C'-I \text{ 共線。}$$

   而且

   $$\begin{aligned}\angle FA'B' &= \angle FA'C'+\angle B'A'C' \\ &= \angle A'B'C'+\angle B'A'C' \\ &= 90^\circ,\end{aligned}$$

   同理可知，$\angle IB'A'=90^\circ$ 又因為 $\angle A'FC'=\angle B'IC'=90^\circ$，所以

   $$\text{四邊形 } A'B'IF \text{ 為矩形。}$$

2. 利用矩形對邊等長的性質，來推出勾股定理的關係式：

   因為四邊形 $A'B'IF$ 為矩形，所以 $\overline{A'B'}=\overline{FI}$，即

   $$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：

   根據 Alexander Bogomolny 說道，這個證明是 Geoffrey Margrave 傳給他的，而也有類似的證明，是出自以下的書籍：

   J. D. Birkhoff and R. Beatley (1999). *Basic Geometry* (p. 82). New York: AMS Chelsea Publishing Company.

2. 心得：

   此證明是利用拼湊的方式來證明，將三個相似的三角形拼湊出一個大的矩形，若學生直接閱讀，可能較不容易發現大的圖形為矩形，但若給學生圖形直接操作，可以非常容易了解，只要能理解圖形，就可以輕鬆推論出勾股定理的等式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學

●		●	●	●

4. 附件：《無字證明》書上的類似證明：

Frank Burk 在尼爾森(R. B. Nelsen)的《無字證明》(Proofs Without Words)這本書第 7 頁就有類似的證明，如下圖，他一樣將原始的三角形放大成另外三個相似的直角三角形，並將較小的兩個三角形拼湊成大的三角形，因為拼湊完是相同的直角三角形，所以比較邊長後，即可推出勾股定理的相關式，雖然沒有任何的文字證明，但在圖中很明顯的就能看出關係。