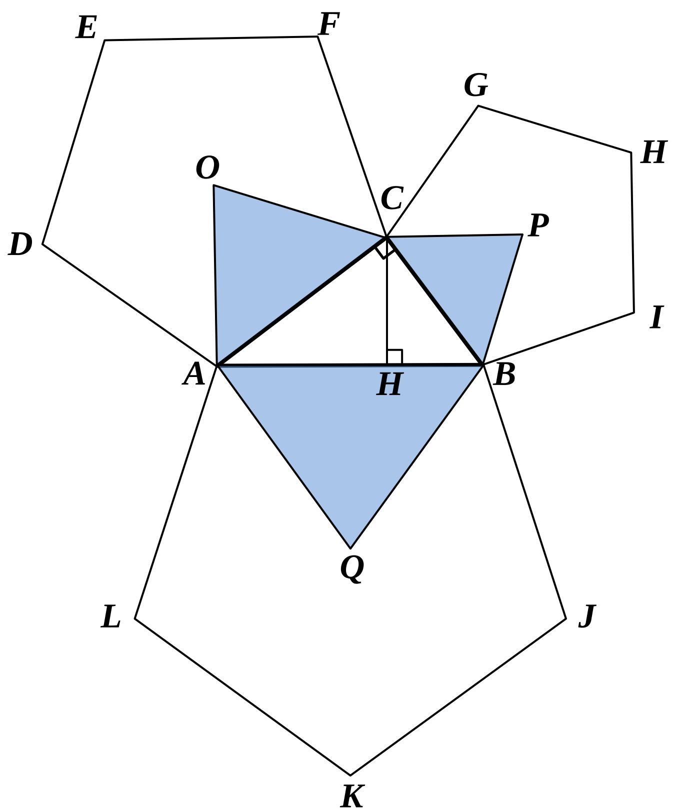
勾股定理證明-A108

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊 $\overline{AC},\overline{BC},\overline{AB}$，分別向外作正五邊形 $ADEFC$，正五邊形 $CGHIB$，正五邊形 $ABJKL$，其中各正五邊形的中心點為 O,P,Q。
2. 分別連接 $\overline{OA},\ \overline{OC},\ \overline{PC},\ \overline{PB},\ \overline{QA},\ \overline{QB}$。
3. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 H 點。



【求證過程】

直角三角形 ABC 的三邊上向外延伸的三個相似正五邊形，其面積比等於以三邊為斜邊長的直角三角形面積比，利用直角三角形內面積和關係可推得較小的兩個相似三角形面積和等於最大的相似三角形面積，最後推得勾股定理的關係式。

1. 由三個正五邊形的相似關係，可推得其面積比等於其對應的邊長平方比：
   將一個正五邊形視為五個全等的等腰三角形合成，可得

$$\begin{aligned}正五邊形ABJKL:正五邊形CGHIB:正五邊形ADEFC &= 5等腰\Delta ABQ:5等腰\Delta CBP:5等腰\Delta ACO \\ &= 等腰\Delta ABQ:等腰\Delta CBP:等腰\Delta ACO,\end{aligned}$$

因為

$\angle AOC=\angle BPC=\angle AQB=\dfrac{360°}{5}=72°, \angle OAC=\angle PCB=\angle QAB=\dfrac{180°-72°}{2}=54°$，所以等腰 $\Delta ABQ\sim$ 等腰 $\Delta CBP\sim$ 等腰 ΔACO (AA 相似)，則其面積比為對應的邊長平方比，即

$$等腰\Delta ABQ:等腰\Delta CBP:等腰\Delta ACO=c^2:a^2:b^2,$$

因此

$$正五邊形ABJKL:正五邊形CGHIB:正五邊形ADEFC=c^2:a^2:b^2.$$

2. 證明三角形 ABC 與三角形 CBH 、三角形 ACH 為相似三角形，可得其面積比等於對應的邊長平方比：
因為 $\angle ACB=\angle CHB=\angle AHC=90°, \angle HAC=\angle CAB=90°-\angle CBH=\angle HCB$ ，所以
$$\Delta ABC\sim\Delta CBH\sim\Delta ACH \quad \text{(AA 相似)},$$
因此其面積比為對應的斜邊邊長平方比，即
$$\Delta ABC:\Delta CBH:\Delta ACH=c^2:a^2:b^2.$$

3. 由第 1、2 點結果可知直角三角形 ABC 向外的三個正五邊形面積比等於直角三角形 ABC 內以 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$ 為斜邊的三個相似直角三角形面積比，即
$$正五邊形ABJKL:正五邊形CGHIB:正五邊形ADEFC=\Delta ABC:\Delta CBH:\Delta ACH.$$

4. 利用三角形 ABC 為三角形 CBH 與三角形 ACH 的面積和關係，可推得正五邊形 $ABJKL$ 亦為正五邊形 $CGHIB$ 與正五邊形 $ADEFC$ 的面積和，最後推得勾股定理的關係式。
由第 3 點結論，經由比例式關係，可推得
$$正五邊形ABJKL:(正五邊形CGHIB+正五邊形ADEFC)=\Delta ABC:(\Delta CBH+\Delta ACH),$$
又因為 $\Delta ABC=\Delta CBH+\Delta ACH$ ，代回上式可得
$$正五邊形ABJKL:(正五邊形CGHIB+正五邊形ADEFC)=1:1,$$
所以
$$正五邊形ABJKL=正五邊形CGHIB+正五邊形ADEFC.$$
再由第 1 點可知： $正五邊形ABJKL:正五邊形CGHIB:正五邊形ADEFC=c^2:a^2:b^2.$

代回上式，即可得

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 12 月 7 日想到的。
2. 心得：由三邊向外延伸的相似形的面積比必為邊長的平方比，則可推得較小的兩邊延伸出的相似形面積和會等於斜邊向往外延伸出的相似形面積。此證明很顯然地說明了一般化的情況，就是以直角三角形三邊往外延伸的圖形不一定是正方形，只要是相似之形狀，仍有面積和之關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●