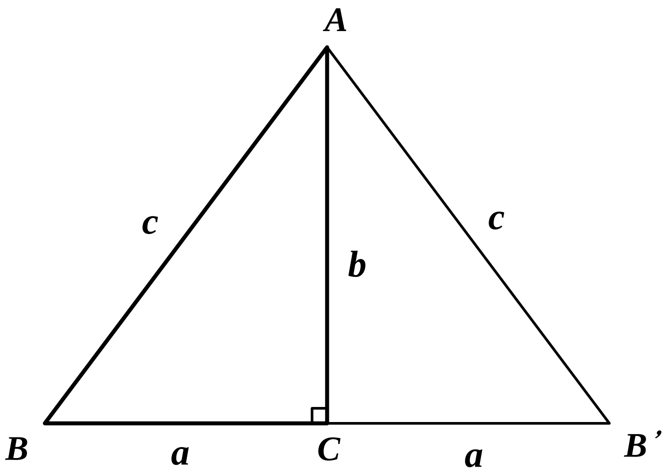
勾股定理證明-A107

【作輔助圖】

1. 將 $\overline{BC}$ 延長至 B'，使得 $\overline{B'C}=\overline{BC}$ 。

2. 連接 $\overline{AB'}$ 。



【求證過程】

作一個全等於三角形 ABC 的三角形，先說明兩三角形有全等性質，利用海龍定理【註: 補充說明】及三角形面積計算分別求出兩全等三角形的面積和表示式，將兩種不同表示式整理，即可推得勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 $AB'C$ 與三角形 ABC 全等，推得三角形 ABB' 的三邊長：

   因為 $\overline{B'C}=\overline{BC}$ ， $\angle ACB=\angle ACB'=90°$ ，且 $\overline{AC}=\overline{AC}$ ，所以

   $$\Delta ABC\cong\Delta AB'C\text{(SAS 全等)},$$

   可推得三角形 ABB' 三邊長為

   $$\overline{AB'}=c,\overline{AB}=c,\overline{BB'}=2a.$$

2. 在任意的三角形中，利用海龍公式【註: 補充說明】計算三角形 ABB' 的面積：

   令 $s=\dfrac{\overline{AB}+\overline{AB'}+\overline{BB'}}{2}=\dfrac{c+c+2a}{2}=a+c$ ，則

   $$\begin{aligned}\Delta ABB'&=\sqrt{s\left(s-\overline{AB}\right)\left(s-\overline{AB'}\right)\left(s-\overline{BB'}\right)}\\&=\sqrt{(a+c)(a+c-c)(a+c-c)(a+c-2a)}\\&=\sqrt{(a+c)a^2(c-a)}.\end{aligned}$$

3. 在三角形 ABB' 中以 $\overline{BB'}$ 為底，$\overline{AC}$ 為高，亦可求出三角形面積：

$$\Delta ABB' = \frac{1}{2}\overline{BB'}\times\overline{AC} = \frac{1}{2}(2a)b = ab.$$

4. 比較同一面積的兩種不同表示式，等式整理，即可推出勾股定理的關係式：
由第 3、4 點可知三角形 ABB' 有兩種不同的表示式，故可整理成

$$\sqrt{(a+c)a^2(c-a)} = ab$$
$$(a+c)a^2(c-a) = (ab)^2$$
$$(a+c)(c-a) = b^2$$
$$c^2 - a^2 = b^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
Versluys, J. (1768). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 86). Amsterdam: A. Versluys.
2. 心得：利用同一面積用不同的方式求出不同的面積表示式，再由面積的恆等式而推得勾股定理，此部分的想法是常見的方法且易懂的，只是對中學生來說，此證明運用到的海龍定理是超出目前中學教科書內容，其詳細定義在第 4 點補充說明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	

4. 補充說明：

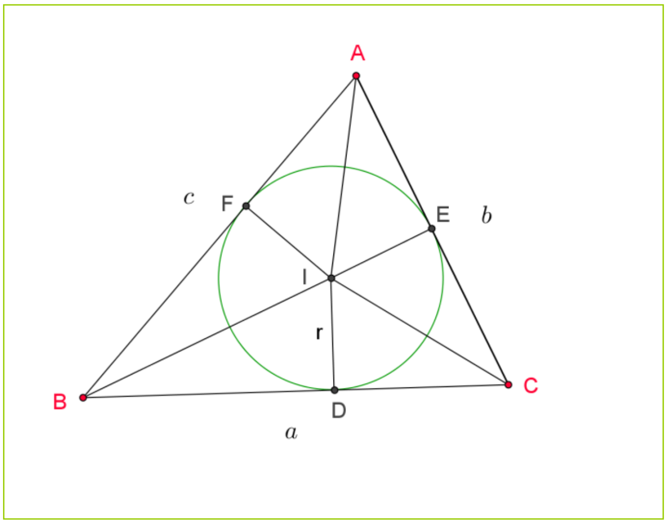
■ 海龍(Heron)的簡介：
海龍約在西元 10~70，生於埃及的亞歷山卓，是一位數學家及工程師。他發明了用三角形三邊長導出三角形面積的公式，即所謂海龍公式。在他的年代，三角函數的餘弦定理並未普遍的應用，他採平面幾何的相似形，巧妙的利用線段比例的擴分，中學生就能看懂的敘述，導出這個由三邊長求三角形面積的公式，但卻是一個很不簡單的技巧。在中學的數學課程裡，三角形的全等有三類：SAS、ASA、SSS。決定一個三角形面積，也至少有三種以上的方法，海龍公式就是以 SSS 決定三角形面積的作法。

■ 海龍定理：說明如何用三邊長導出三角形的面積公式，採最原始的證明與想法，來表達海龍公式。

【證明過程】

已知三角形ABC的三個內角的對應邊a,b,c以及內切圓半徑r與內心I。

圖一：



由以上圖一可知，且令$s=\dfrac{(a+b+c)}{2}$

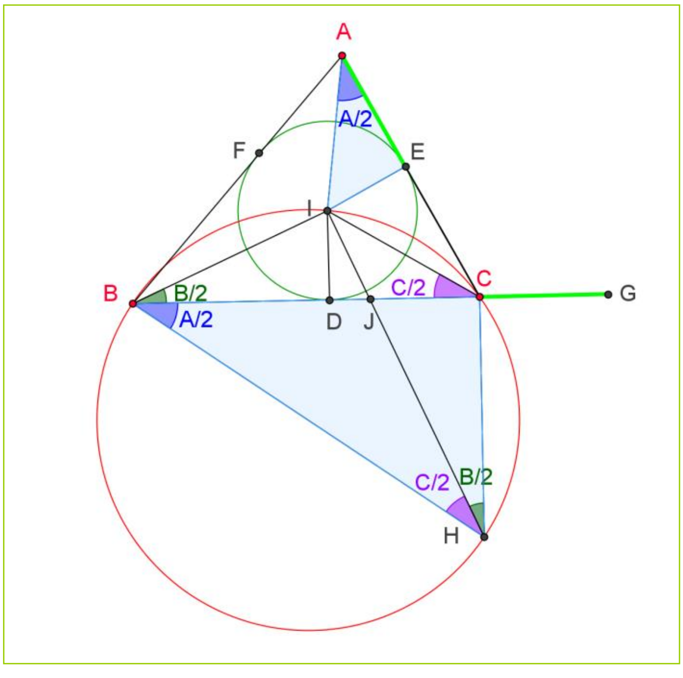
$$\Delta ABC\text{面積}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=\ s\cdot r,$$

由圓外一點向圓作切線，則切線段長相等。亦即：

$$\overline{AF}+\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{CD}=a+b+c=2s,$$

又因為$\overline{AF}=\overline{AE},\overline{BF}=\overline{BD},\overline{CE}=\overline{CD}$，所以$\overline{AE}+\overline{BD}+\overline{CD}=\ s,$

圖二：



由圖二中，從I點作$\overline{BI}$的垂直線，由C點作$\overline{BC}$的垂直線，兩直線交於在H點，則四邊形$BICH$是圓內接四邊形，由同弧所對的圓周角相等

$\angle CHJ = \frac{1}{2}\angle B$，$\angle BHJ = \frac{1}{2}\angle C$，則$\angle CBH = \frac{1}{2}\angle A$,

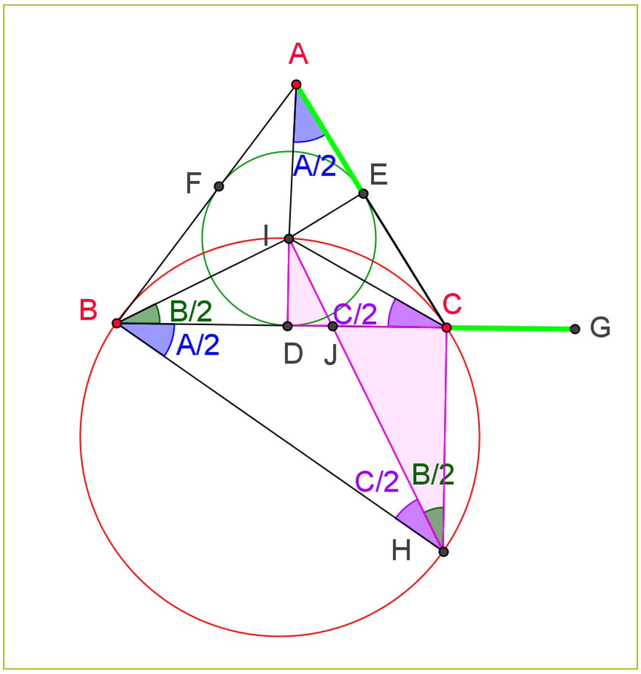
因為三角形CBH是直角三角形，$\angle CBH$與$\angle CHB$互為餘角，所以

$$\Delta AEI \sim \Delta BCH \ (AA \text{ 相似}),$$

因此可得

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{IE}} \text{......(1)} \quad (\text{內切圓半徑 } \overline{IE} = \overline{ID} = \overline{IF} = r)$$

圖三：



同理，可推得$\Delta HCJ \sim \Delta IDJ$ (AA 相似)，故可得

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}} \text{......(2)}$$

再由$\overline{IE} = \overline{ID} = r$，將(1)、(2)合併

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}} \text{......(3)}$$

為了湊成$\overline{BG} = \frac{a+b+c}{2} = s$，且$\overline{AE} + \overline{BD} + \overline{CD} = s$，令$\overline{CG} = \overline{AE}$，代入(3)得到

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{DJ}} \text{......(4)}$$

把(4)經由合比定理 $\dfrac{\overline{BC}+\overline{CG}}{\overline{CG}}=\dfrac{\overline{CJ}+\overline{DJ}}{\overline{DJ}}$,

得到

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DJ}} \text{......(5)}$$

將(5)左邊擴分 $\overline{BG}$ 倍(要做面積)，右邊擴分 $\overline{BD}$ 倍(要做 $(s-b)$)，則

$$\frac{\overline{BG}\times\overline{BG}}{\overline{CG}\times\overline{BG}} = \frac{\overline{CD}\times\overline{BD}}{\overline{DJ}\times\overline{BD}} \text{........(6)}$$

但因為三角形 BIJ 是直角三角形，$\overline{ID}$ 是斜邊上的高，故 $\overline{DJ}\cdot\overline{BD}=\overline{ID}^2$ 代入(6)，則

$$\frac{\overline{BG}^2}{\overline{CG}\times\overline{BG}} = \frac{\overline{CD}\times\overline{BD}}{\overline{ID}^2} \text{......(7)}$$

由 $\overline{AE}+\overline{BD}+\overline{CD}= s \Rightarrow \overline{CG}=\overline{AE}= s-a$ ，$\overline{CD} = s-c$ ，$\overline{BD} = s-b$ 代入(7)，且將(7)交叉相乘，可得

$$\overline{BG}^2\times\overline{ID}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$(s\cdot r)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

因此

$$\Delta ABC \text{ 面積}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

■ 由海龍公式推勾股定理：

直角三角形 ABC ，若 $\angle C$ 為直角，令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，則

$$\Delta ABC=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$

$$\frac{ab}{2}=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

$$\frac{ab}{2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)\left(a+c-b\right)\left(a+b-c\right)}$$

$$\frac{ab}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{[\left(a+b\right)+c][\mathrm{c}+\left(b-a\right)][\mathrm{c}-\left(b-a\right)][\left(a+b\right)-c]}$$

$$2ab=\sqrt{[\left(a+b\right)^2-c^2][\mathrm{c}^2-\left(b-a\right)^2]}$$

$$2ab=\sqrt{\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)\left(2ab-b^2-a^2+\mathrm{c}^2\right)}$$

$$2ab=\sqrt{\left(2ab\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}$$

$$4a^2b^2=\left(2ab\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$$

化簡得到

$$(a^2+b^2-c^2)^2=0$$

$$a^2+b^2-c^2=0$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$