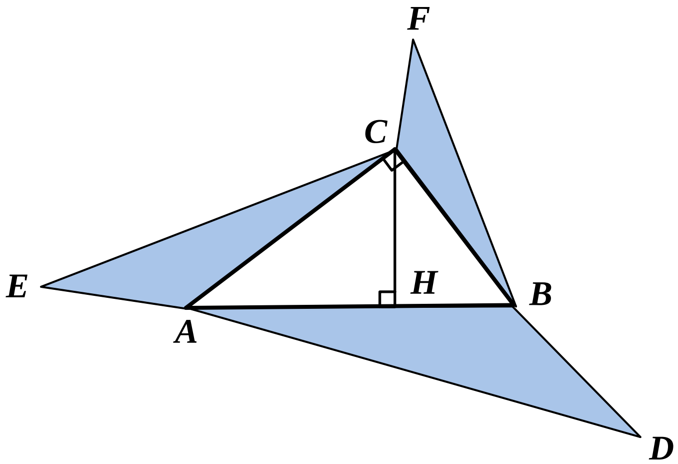
勾股定理證明-A106

【作輔助圖】

1. 在直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊上向外作任意的三角形 ABD 。

2. 分別在 $\overline{BC},\overline{AC}$ 上向外作 $\angle CBF=\angle ACE=\angle BAD,\angle BCF=\angle CAE=\angle ABD$ 。

3. 從 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，交 $\overline{AB}$ 於 H 點。



【求證過程】

直角三角形 ABC 的三邊上向外延伸為三個相似的三角形，因為其面積比等於以三邊為斜邊長的直角三角形面積比，利用直角三角形內面積和關係推得較小的兩個相似三角形面積和等於最大的相似三角形面積，最後推得出勾股定理的關係式。

1. 由三角形 ABD 與三角形 BCF 、三角形 CAE 的相似關係，可得其面積比等於對應的邊長平方比：

   因為 $\angle CBF=\angle ACE=\angle BAD,\angle BCF=\angle CAE=\angle ABD$ ，所以

   $$\Delta ABD\sim\Delta BCF\sim\Delta CAE \text{（AA 相似）},$$

   因此三角形 ABC 的 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$ 上分別有三個相似的三角形 ABD 、三角形 BCF 、三角形 CAE ，其面積比為對應的邊長平方比，即

   $$\Delta ABD:\Delta BCF:\Delta CAE=c^2:a^2:b^2.$$

2. 證明三角形 ABC 與三角形 CBH 、三角形 ACH 為相似三角形，可得其面積比等於對應的邊長平方比：

   因為 $\angle ACB=\angle CHB=\angle AHC=90°,\angle HAC=\angle CAB=90°-\angle CBH=\angle HCB$ ，所以

   $$\Delta ABC\sim\Delta CBH\sim\Delta ACH \quad \text{(AA 相似)},$$

因此其面積比為對應的斜邊邊長平方比，即

$$\Delta ABC : \Delta CBH : \Delta ACH = c^2 : a^2 : b^2.$$

3. 由第 1、2 點結果可知直角三角形 ABC 向外延伸的三個相似三角形面積比等於直角三角形 ABC 內以 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 為斜邊的三個相似直角三角形面積比，即

$$\Delta ABD : \Delta BCF : \Delta CAE = \Delta ABC : \Delta CBH : \Delta ACH.$$

4. 利用三角形 ABC 為三角形 CBH 與三角形 ACH 的面積和關係，可推得三角形 ABD 亦為三角形 BCF 與三角形 CAE 的面積和，最後推得勾股定理的關係式。
由第 3 點結論，經由比例式關係，可推得

$$\Delta ABC : \left(\Delta CBH + \Delta ACH\right) = \Delta ABD : \left(\Delta BCF + \Delta CAE\right),$$

又因為 $\Delta ABC = \Delta CBH + \Delta ACH$ ，代回上式可得

$$\Delta ABD : (\Delta BCF + \Delta CAE) = 1:1,$$

所以

$$\Delta ABD = \Delta BCF + \Delta CAE,$$

再由第 1 點結論可知： $\Delta ABD : \Delta BCF : \Delta CAE = c^2 : a^2 : b^2$ ，代回上式

即可得

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 12 月 7 日想到的。
2. 心得：由三邊向外延伸的相似形的面積比必為邊長的平方比，則可推得較小的兩邊延伸出的相似形面積和會等於斜邊向往外延伸出的相似形面積。因此，以直角三角形三邊往外延伸的圖形不一定是正方形，只要是相似之形狀，仍有面積和之關係。在 A108 證明可進一步看見直角三角形三邊向外延伸為三個相似的等腰三角形與正五邊形的例子。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●